MATEMATIKA 12

I dalis



LEIDĖJŲ ŽODIS

Mieli dvyliktokai,
šis vadovėlis skirtas pasirinkusiems išplėstinį matematikos kursą. Vadovėlio pirmą dalį sudaro 1, 2 bei 3 skyriai, antrą — 4 ir 5 skyriai bei XI–XII klasės kurso kartojimo medžiaga. Kaip ir XI klasės vadovėlyje, kiekvienas skyrius sudarytas iš skyrelių, kuriuose dėstoma teorija, pateikiami išspręsti pavyzdžiai ir duodamos užduotys, kurias turėtumėte atlikti savarankiškai. Beveik kiekvieno skyrelio pabaigoje yra pratimų ir uždavinių, susijusių su prieš tai nagrinėta teorine medžiaga. Spręsdami uždavinius geriau įsiminsite teoriją, giliau suvoksite dalyką. Kaip paprastai, sunkesniųjų uždavinių numeriai nuspalvinti.
Kiekvieno skyriaus pabaigoje yra kartojimo uždavinių. Spręsdami šiuos uždavinius prisiminsite skyriaus medžiagą. Tarp jų rasite ir geometrijos uždavinių, kuriuos spręsti mokėtės pagrindinėje mokykloje bei XI klasėje. Kartojimo uždavinių skyrelyje su atskiru pavadinimu „Įvairūs uždaviniai“ pateikta uždavinių, kurie nėra tiesiogiai susiję su išnagrinėtu skyriumi. Šiame skirsnyje rasite ir lengvesnių, ir sunkesnių uždavinių. Kai kurių uždavinių sprendimo būdai nėra aptarti teorijoje, taigi juos sprendžiant gali tekti kai ką sugalvoti patiems, galbūt patarimo paklausti mokytojo. Kam uždavinių pasirodys per mažai, galės pasinaudoti atskira knygele išleistu uždavinynu.
Šį vadovėlį kūrė ne vien autorių kolektyvas, bet ir leidyklos specialistai, konsultantai, eksperimentuojantys mokytojai. Nuoširdžiai dėkojame visiems, prisidėjusiems rengiant vadovėlį.
Prašome savo pastabas, pageidavimus ir pasiūlymus siųsti adresu:
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2021 Vilnius.

Vadovėlį rengė autorių kolektyvas:

***Kornelija Intienė*, *Antanas Skūpas*, *Vilius Stakėnas*, *Eugenijus Stankus*, *Vladas Vitkus*.**

Su eksperimentiniu vadovėliu dirbo mokytojai: *R. Biekšienė, V. Bartkuvienė, K. Intienė, M. Jakutienė, V. Jankevičienė, R. Jonaitienė, O. Juodienė, A. Karmanova, S. Kavaliūnienė, R. Klasauskienė, I. Knyzelienė, R. Kučiauskienė, A. Kukučionienė, R. Kuliešienė, D. Matienė, G. Mikalauskienė, L. Papuškienė, P. Puzinaitė, V. Sičiūnienė, V. Stoškuvienė, A. Ūsienė, V. Viniautienė, R. Želvienė, R. Žeimienė.*

MATEMATIKA 12

I DALIS

Išplėstinis kursas

TEV

VILNIUS 2003

UDK 51(075.3)
Ma615

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota 2003 02 10 Nr. 75

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Darbo vadovas *Vilius Stakėnas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Valdas Vanagas*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak, Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė*

Korektorė *Žydrūnė Stundžienė*

Konsultantai: *Marytė Stričkienė, Elmundas Žalys*

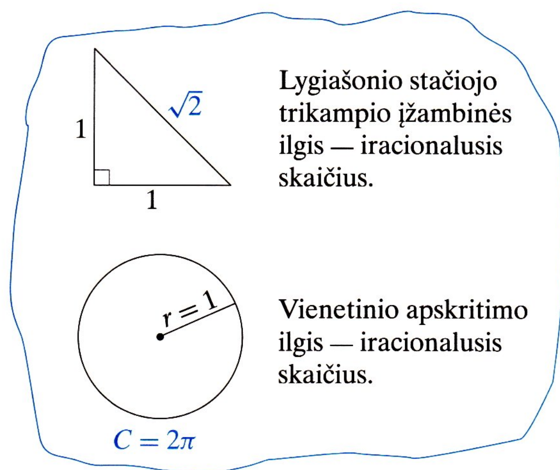
Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955–491–44–2 (1 dalis)

Turinys

Naujųjų laikų matematika

Natūralieji skaičiai, taškai, tiesės, atkarpos... Nuo jų prasidėdavo pažintis su matematika prieš šimtus metų, nuo jų prasideda ir dabar. Kad šios sąvokos nėra tokios paprastos, kaip gali atrodyti, įsitikino jau antikinės Graikijos matematikai. Išties, nagrinėdami paprastą lygiašonį statųjį trikampį, atrandame iracionalumo reiškinį, o vienetinių atkarpų, turinčių bendrą pradžios tašką, galai sudaro apskritimą — kreivę, kurios ilgis yra iracionalusis skaičius. Mažas žingsnelis — ir mes susiduriame su paslaptimis, kurių neįminsi pasitelkęs vien skaičiavimo ir matavimo įgūdžius.



Antikinės Graikijos matematikai tik užčiuopė šias paslaptis. Turėjo praeiti daug amžių, kol matematikai išmoko tyrinėti tai, kas „iracionalu“ ir kas „kreiva“. Naujųjų laikų matematikai: Kepleris, Kavaljeris, Paskalis, Ferma, Leibnicas, Niutonas, Dekartas ... gerai išmanė antikinės Graikijos matematikų sukurtą mokslą, tačiau aklai neklausė autoritetų, siekdami gauti naujų rezultatų mąstė išradingai, rizikingai... Ir laimėjo!

Dabartis visada prasideda senovėje

Antikinės Graikijos matematika — tarsi kokia superžvaigždė švystelėjo ir užgeso. Ją kūrusių žmonių veikalai daugiau kaip tūkstantį metų niekam Europoje nerūpėjo. Tikras stebuklas, kad bent dalis jų išliko!

XVI amžiuje Graikijos matematikų veikalus imta versti į Europos kalbas ir studijuoti. Šitaip europiečiai atrado Archimedą — vieną iš pačių didžiausių protų visoje žmonijos istorijoje.

Archimedas gimė apie 287 m. pr. Kr. Sirakūzuose. Apie jį žinoma daugiau negu apie kitus Graikijos matematikus. Jaunystėje jis lankėsi tuometinio mokslo centre — Aleksandrijoje. Sugrįžęs į Sirakūzus bendravo su Aleksandrijos mokslininkais laiškais,



Archimedas (gyveno apie 287–212 m. pr. Kr.).

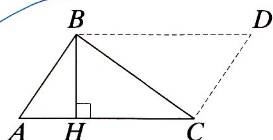
Tiek Archimedo laikais, tiek ir dabar žmonės ne tiek jau daug žino apie savo amžininkus — matematikus ir jų atradimus. Tačiau Archimedas buvo įžymus. Tiesa, daugiau dėl savo mechaninių išradimų. Pavyzdžiui, būdamas Egipte, Archimedas išrado sraigtą — įrenginį vandeniui kelti. O romėnams, apsiautusiems gimtąjį Archimedo miestą Sirakūzus, Archimedo vardas kėlė baimę dėl daugybės jo išrastų karo mašinų, svaidančių akmenis, ugnį, skandinančių laivus... Tas mašinas Archimedas konstravo draugų ir karaliaus paprašytas, o pats savo užsiėmimų „grynąja" matematika nebūtų keitęs į nieką...

kuriuose rašydavo apie savo atradimus. Archimedas mums ne vien tik prieš tūkstantmečius gyvenusio mokslininko vardas. Senųjų autorių pasakojimai padeda gyvai jį įsivaizduoti. „Eureka!" — džiaugsmingai sušuko Archimedas, supratęs kūnų plūduriavimo dėsnį. Ir šiandien žmonės šitaip reiškia džiaugsmą švystelėjus ilgai lauktai gerai minčiai. „Duokite man atramos tašką ir aš pajudinsiu Žemę!" — kitas įžymus Archimedo posakis, kuriame — išdidumas dėl savo atradimo — sverto, o gal ... kas dabar žino — ir savotiško humoro atšvaitas. Ir pagaliau paskutiniai Archimedo žodžiai, ištarti įsiveržusiam romėnų kareiviui: „Neliesk mano brėžinių!".

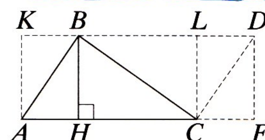
Tačiau grįžkime prie matematikos. Ko gi naujųjų laikų matematikai galėjo išmokti iš Archimedo darbų?

Figūrų plotų ir kūnų tūrių skaičiavimas visada buvo ir praktikai, ir teorijai svarbus uždavinys. Graikai puikiai mokėjo jį spręsti, kai figūros — daugiakampiai, o kūnai — briaunainiai (prizmės, piramidės, ...). Tiesa, tokių formulių plotams ir tūriams skaičiuoti, kokias naudojame mes, jie nežinojo. Todėl jie ne skaičiavo figūrų plotus ir kūnų tūrius, bet lygino juos su žinomais kitų figūrų plotais ar kūnų tūriais.

Pavyzdžiui, pasirėmę brėžiniais galime nesunkiai įsitikinti, kad trikampio ABC plotas sudaro lygiai pusę stačiakampio, kurio kraštinių ilgiai tokie pat kaip AC ir BH, ploto.



$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\text{▱}ABDC}$



$S_{\text{▱}ABDC} = S_{\square BDFH}$

$S_{\square BDFH} = S_{\square KLCA}$

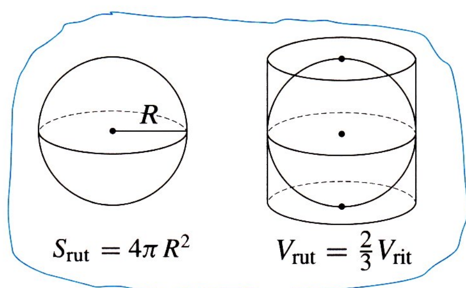
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\square AKLC}$

Tačiau kai figūra nėra daugiakampis, tokiais samprotavimais nieko nepasieksi. Veltui graikų, taip pat ir vėlesnių laikų matematikai bandė išspręsti įžymųjį skritulio kvadratūros uždavinį:

Naudojantis skriestuvu ir liniuote nubraižyti kvadratą, kurio plotas būtų lygus vienetinio skritulio plotui.

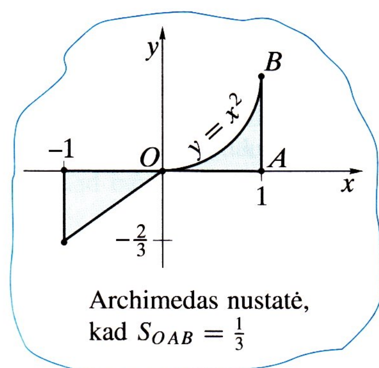
Šitaip graikų matematikos stiliumi norėta „apskaičiuoti" skritulio plotą. Niekam tai nepavyko! Tik po šimtmečių buvo įsitikinta, kad pavykti ir negalėjo.

Archimedas teisingai išsprendė daug plotų ir tūrių skaičiavimo uždavinių. Pavyzdžiui, jis įrodė, kad rutulio paviršiaus plotas lygus keturgubam jo didžiojo pjūvio plotui ($S_{\text{rut}} = 4\pi r^2$), rutulio tūris sudaro du trečdalius apibrėžto apie jį ritinio tūrio (mes užrašome šį teiginį tūrio formule $V_{\text{rut}} = \frac{4}{3}\pi r^3$).



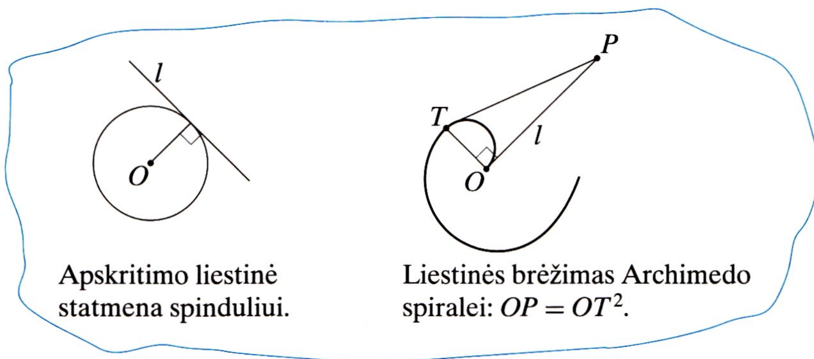
Ieškodamas sudėtingų figūrų plotų, Archimedas „supjaustydavo" jas į juosteles, ieškodamas kūnų tūrių — dalydavo juos į plonas plokšteles, o po to bandydavo šių juostelių plotus ar plokštelių tūrius sumuoti.

O kartais geometriniams rezultatams gauti jis pasitelkdavo net mechaniką. Pavyzdžiui, parabolinio „trikampio" plotą Archimedas surado samprotaudamas maždaug taip. Įsivaizduokime, kad plotas „sveria". Jeigu parabolinį trikampį padėsime ant sverto su atramos tašku O dešiniojo peties — svertas nusvirs. Kad jis liktų pusiausvyroje, reikia tam tikrą plotą uždėti ant kairiojo peties (arba pakabinti po juo). Remdamasis sverto taisykle Archimedas įrodė, kad svertas liks pusiausvyroje, jeigu po petimi OA „pakabinsime" tam tikrą trikampį. Pasinaudojęs tuo Archimedas apskaičiavo ir parabolinio trikampio plotą. Tai bent samprotavimas!



Archimedas nustatė, kad $S_{OAB} = \frac{1}{3}$

Tiesa, pats Archimedas nemanė, kad tokie, nors ir labai išradingi samprotavimai yra ir gautųjų teiginių įrodymai. Gavęs rezultatus, jis juos griežtai matematiškai įrodydavo.
Kitas svarbus matematikos uždavinys, kurį graikai tik pradėjo tyrinėti — kreivių liestinių brėžimo uždavinys. Graikų matematikai mokėjo nubrėžti tik vienos kreivės — apskritimo liestinę. Ir mes tai mokame: per apskritimo spindulio galą nubrėžkime statmenį spinduliui ir gausime liestinę! O ką daryti, kai kreivė kitokia: parabolė, hiperbolė, elipsė, ...? Šių ir kitų kreivių liestines išmokta braižyti tik naujaisiais laikais. Išskyrus vieną kreivę, kurią tyrinėdamas Archimedas vėl pranoko savo laikmečio matematikus.
Tos kreivės — Archimedo spiralės atsiradimą galime įsivaizduoti taip. Įsivaizduokime, kad iš spindulio pradžios taško O pastoviu greičiu pajuda taškas, o pats spindulys pradeda suktis apie savo pradžią pastoviu kampiniu greičiu, kurio skaitinė reikšmė lygi taško judėjimo spinduliu greičiui. Įsivaizduokime, kad judėdamas taškas palieka pėdsaką, t. y. brėžia kreivę. Ši kreivė ir yra Archimedo spiralė.



Apskritimo liestinė statmena spinduliui.

Liestinės brėžimas Archimedo spiralei: $OP = OT^2$.

Archimedas surado būdą, kaip nubrėžti spiralės liestinę pasirinktame taške T: nubrėžkime tiesę l, einančią per tašką O statmenai atkarpai OT ir atidėkime toje tiesėje tašką P, kad būtų $OP = OT^2$. Tada tiesė, einanti per taškus T ir P, bus spiralės liestinė.

Dangaus kūnai ir vyno statinės

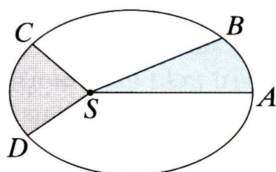
Europiečiai Archimedo veikalus pradėjo studijuoti tik pradedant XIII amžiumi. Pirmiausia juos, žinoma, reikėjo išversti ir išleisti. Po to — perskaityti, suprasti ir bandyti kelti bei spręsti naujus uždavinius.
Pirmasis naujųjų laikų europietis, kuriam pavyko išspręsti daug plotų ir tūrių skaičiavimo uždavinių — vokiečių mokslininkas Johanas Kepleris. Johanui Kepleriui (1571–1630) visą gyvenimą teko sunkiai grumtis. Ir ne vien tik su matematikos uždaviniais, bet ir sunkiomis gyvenimo aplinkybėmis. Dažnai jis vos įstengdavo sudurti galą su galu, tekdavo bėgti nuo religinių persekiojimų, karo, netgi kovoti ginant motiną, apkaltintą raganavimu...
Tiesa, 1601 metais jis gavo Prahoje karališkojo astronomo vietą su „karališku“ atlyginimu. Tačiau pasirodė, kad tik pažadas tebuvo karališkas — valstybės iždas buvo tuščias, pinigų niekas nemokėjo ir kartais jų tekdavo prasimanyti sudarinėjant horoskopus.



Johanas Kepleris (1571–1630)

Mūsų laikais Keplerio vardas dažniausiai minimas kalbant apie planetų judėjimo dėsnius. Lengva ištarti: „planetų judėjimo orbitos yra elipsės", tačiau kiek dienų ir naktų Kepleris skaičiavo, kol tai nustatė! Pavyzdžiui, vien skaičiuodamas Marso orbitą Kepleris prirašė daugiau kaip 1000 lapų! Pats jis šį darbą vadino „karu su Marsu". Kepleris buvo giliai tikintis žmogus. Jis manė, kad pasaulį Dievas sukūrė pagal matematinį planą ir tik matematikai gali jį atskleisti.

Tačiau Prahoje Kepleris galėjo tyrinėti jo pirmtako astronomo Tycho Brahės sukauptus astronominius duomenis. Išnagrinėjęs juos Kepleris suformulavo savo įžymiuosius planetų judėjimo dėsnius. Pirmasis jų teigia, kad planetos juda apie Saulę ne apskritimais, bet elipsėmis. Antrasis Keplerio dėsnis tvirtina, kad spindulys, jungiantis Saulę su planeta, per lygius laikotarpius nubrėžia lygiapločius sektorius.



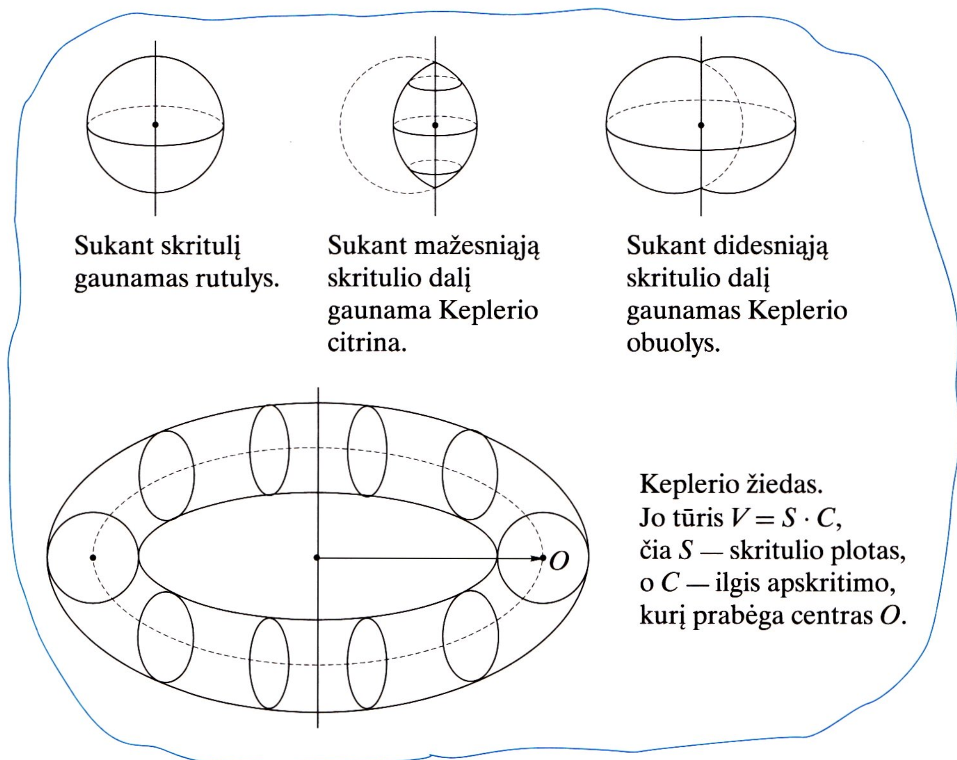
Antrasis Keplerio dėsnis: *Jei planeta besisukdama apie Saulę S iš A į B ir iš C į D nukeliauja per vienodus laiko tarpus, tai sektorių AB ir SCD plotai lygūs.*

Taigi dėsnyje kalbama apie sudėtingų figūrų — elipsės sektorių plotus. Kaip juos apskaičiuoti? Kepleris įsivaizdavo, kad šie plotai yra tarsi sudaryti iš be galo daugelio spindulių. Tereikia šią spindulių begalybę „susumuoti".

Toks požiūris Antikos matematikams, vertinusiems tik griežtai įrodytus teiginius, būtų buvęs nepriimtinas. Tačiau naujųjų laikų matematikai mąstė kitaip. Jie nevengė rizikingų, kartais nelabai aiškių idėjų — kad tik gautų teisingą rezultatą. Ir gaudavo!

Didelės reikšmės naujųjų laikų matematikos raidai turėjo Johano Keplerio veikalas gana keistu pavadinimu: „Naujoji vyno statinių geometrija“.

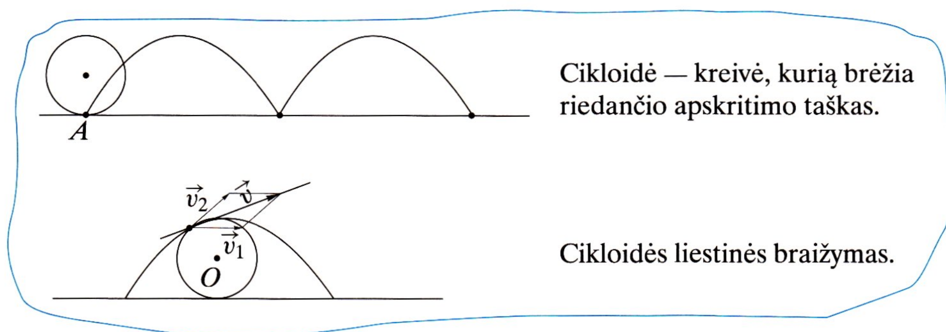
Kartą atvykęs pas vynininkus pirkti vyno savo vestuvėms Kepleris stebėjo, kaip jie matuoja statinių tūrius. Jis suabejojo, ar teisinga visų statinių tūrius matuoti ta pačia liniuote, neatsižvelgiant į tai, kad statinės būna įvairios. Kepleris susimąstė, kokie apskritai gali būti kūnai ir kaip skaičiuoti jų tūrius. Jis pradėjo nagrinėti kūnus, kurie gaunami sukant plokščias figūras apie tam tikras tieses. Jeigu suksime, pavyzdžiui, skritulį apie tiesę, einančią per jo centrą, gausime rutulį. Tačiau jeigu tiesė kerta skritulį, bet neina per jo centrą, tai sukant didesniąją atkirstą skritulio dalį gaunamas kitoks kūnas, kurį Kepleris pavadino obuoliu. Jeigu sukama mažesnioji dalis, gaunama „citrina“. Jeigu skritulys sukamas apie tiesę, kuri nekerta skritulio, gaunamas „žiedas“. Savo veikale Kepleris apskaičiavo apie 90 naujų kūnų tūrių. Skaičiuodamas jis skaidė kūnus į mažas dalis, apytiksliai skaičiuodavo jų tūrius ir gautus mažus dydžius sumuodavo. Pavyzdžiui, žiedą plokštumomis galima suskaidyti į mažytes daleles, panašias į mažus ritinius, taikyti joms ritinio tūrio formulę ir po to gautus tūrius sumuoti. Šitaip gaunama žiedo tūrio formulė: žiedo tūris lygus skritulio plotui S, padaugintam iš apskritimo, kurį nuskrieja skrituliui sukantis jo centras, ilgio.



Taip samprotaujant kartais galima ir suklysti. Ir Kepleris kartais suklysdavo. Tačiau svarbiausia — „Naujoje vyno statinių geometrijoje“ buvo daug idėjų, kurias matematikai galėjo tikslinti ir plėtoti.

Greičiai ir liestinės

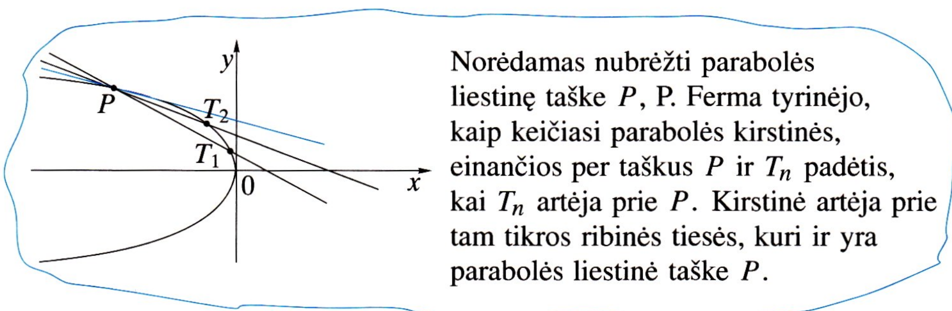
Plotų ir tūrių skaičiavimo uždavinį — didžiąją naujųjų laikų matematikos problemą — nagrinėjo daugelis matematikų, kurių vardai niekad nebus užmiršti: B. Kavaljeris, E. Toričelis, B. Paskalis, P. Ferma, Dž. Volis, ... Liestinės duotajai kreivei brėžimo uždavinys taip pat buvo nagrinėjamas. Naujas tyrinėjimų bruožas — kreivės dažnai būdavo siejamos su judėjimu, o liestinės — su taško, brėžiančio kreivę greičio kryptimi. Panagrinėkime, pavyzdžiui, cikloidę — kreivę, kurią labai mėgo XVI–XVII amžiaus matematikai. Jeigu viename rato taške įtaisysime pieštuką, o ratą ridensime palei sieną, tai ant sienos pieštukas brėš kreivę, kuri vadinama cikloide. Ji sudaryta iš pasikartojančių arkų, primenančių sinusoidę.



Cikloidė — kreivė, kurią brėžia riedančio apskritimo taškas.

Cikloidės liestinės braižymas.

Matematikai išsprendė daug su cikloide susijusių uždavinių: surado cikloidės arkos ilgį, šia arka apribotos figūros plotą, taip pat rado būdą brėžti cikloidės liestinę.
Pavyzdžiui, prancūzų matematikas Robervalis pasiūlė cikloidės liestinę braižyti taip. Kai pieštukas, brėžiantis cikloidę yra taške A, jis tarsi dalyvauja dviejuose judėjimuose: slenka lygiagrečiai tiesei greičiu $\vec{v}_1$ ir sukasi apie tašką O greičiu $\vec{v}_2$ ($v_1 = v_2$). Vadinasi, iš tikrųjų momentinis taško greitis yra $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$; vektoriaus $\vec{v}$ kryptis ir yra cikloidės liestinės kryptis. Ir tai tiesa.
Buvo nagrinėjamas ir bendresnis liestinės duotajame taške braižymo būdas siekiant nustatyti, prie kokios tiesės artėja kreivės kirstinė, einanti per duotąjį tašką ir per kitą kreivės tašką, artėjantį prie pirmojo. Šitaip, pavyzdžiui, P. Ferma nustatė, kaip braižyti parabolės liestines.



Norėdamas nubrėžti parabolės liestinę taške P, P. Ferma tyrinėjo, kaip keičiasi parabolės kirstinės, einančios per taškus P ir T_n padėtis, kai T_n artėja prie P. Kirstinė artėja prie tam tikros ribinės tiesės, kuri ir yra parabolės liestinė taške P.

Didieji varžovai

Taigi plotų (taip pat ir tūrių) skaičiavimas ir kreivių liestinių braižymas — du pagrindiniai naujųjų laikų matematikos uždaviniai. Iš pirmo žvilgsnio jie visiškai skirtingi. Įžvelgti, kad jie yra glaudžiai tarpusavyje susiję ir naudojantis šiuo suvokimu sukurti naują matematikos rūmą įstengė du genialūs žmonės — I. Niutonas (1643–1727) ir V. Leibnicas (1646–1716).

Jie buvo labai skirtingi. Skyrėsi viskuo — kuo tik gali skirtis to paties laikmečio žmonės: kilme, tautybe, interesais, likimais, ... Tik aistra mokslui ir proto jėga jie buvo panašūs.

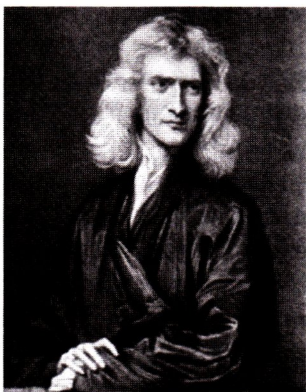
Izaokas Niutonas — paprasto anglų valstiečio sūnus — anksti pajutęs pažinimo aistrą savo ypatingų gabumų dėka greitai kilo akademinės karjeros laiptais: tapo Kembridžo universiteto profesoriumi, Karališkosios Mokslo draugijos nariu, vėliau — jos prezidentu. Neramiame revoliucijų amžiuje nugyveno išoriškai ramų gyvenimą, nesiblaškė, niekur nekeliavo, visą laiką skyrė mokslui, buvo amžininkų gerbiamas ir vertinamas.

Visai kitaip gyveno Vilhelmas Gotfridas Leibnicas. Išsamų klasikinį išsilavinimą jis įgijo, galima sakyti, neišeidamas iš namų — gausioje savo tėvo — teisės profesoriaus bibliotekoje. Tačiau susiskaldžiusios į kunigaikštystes Vokietijos universitetai mokslo lygiu toli gražu neprilygo Anglijos ir Prancūzijos universitetams. Todėl išsamių matematikos žinių Leibnicas įgijo būdamas jau apie trisdešimties metų, kai Paryžiuje bendraujant su žymiausiais matematikais jį apėmė tikra matematinė karštligė. Neįtikėtinai greitai jis perprato naująją matematiką ir pats tartum žerte pažėrė daugybę naujų idėjų. Idėjų jis visada turėjo daugybę — įvairiose srityse: filosofijos, matematikos, politikos, ... Buvo įpratęs viską užsirašinėti, daugelis lapelių su jo užrašais išliko. Iš jų galime spręsti apie neįtikėtinai didelius Leibnico užmojus ir planus. Tačiau tokių sąlygų kaip Niutonas jiems išplėtoti Leibnicas niekada neturėjo. Niekada nedėstė universitete, tarnavo įvairiems didikams ir buvo nuo jų priklausomas...

Šie du žmonės — Niutonas Anglijoje ir Leibnicas kontinentinėje Europoje geriausiai perprato naujųjų matematikos metodų esmę, išplėtojo juos, susistemino ir sukūrė naują matematikos sritį — diferencialinį ir integralinį skaičiavimą. Jų darbai ne tik išreiškė tas pačias idėjas apie kreivių liestines ir figūrų plotų ir kūnų tūrių skaičiavimą, bet savaip jas interpretavo ir papildė. Pavyzdžiui, Niutonas aiškino savo idėjas naudodamasis kitimo, judėjimo terminais, Leibnicas sukūrė patogesnius žymenis ir naujojo skaičiavimo taisykles.

Neapsieita be karštų ginčų dėl prioritetų. Tačiau jie seniai nurimo, nuopelnai deramai įvertinti, o abiejų genijų vardai taikiai sugyvena visuose matematikos vadovėliuose, kuriuose dėstomas diferencialinis ir integralinis skaičiavimas.

Pagrindinis šio skaičiavimo teiginys taip ir vadinasi: Niutono ir Leibnico formulė. Praeis visai nedaug laiko ir jūs atversite puslapį su šia formule ir ją suprasite. Tada prisiminkite, kad kelią prie jos matematikai tiesė šimtmečius.



Izaokas Niutonas (1643–1727).

Izaoko Niutono talentų vaikystėje nebuvo kam pažadinti. Tėvas nemokėjo net pasirašyti, be to — anksti mirė. Ir mokykloje Niutonas niekuo ypatingai neišsiskyrė. Motina net buvo jį atsiėmusi iš mokyklos, norėdama kad jis veikiau išmoktų vesti ūkį. Bet tam Niutonas dar mažiau tiko. Niutono protas tartum „įsibėgėjo“ palaipsniui. Tvirtinama, kad ir matematika jis rimčiau užsiėmė tada, kai nusipirkęs astrologijos knygą suprato jos neperskaitysiąs — trūko matematikos žinių. O pačios svarbiausios matematikos ir fizikos idėjos jam kilo 1665–1667 metais, kai dėl kilusio maro uždarius universitetą jis leido dienas tėviškėje.



Vilhelmas Gotfridas Leibnicas (1646–1726).

Mokykloje Vilhelmui Leibnicui ne ką tebuvo veikti. Savarankiškai jis buvo daugiau išmokęs nei jį galėjo išmokyti mokytojai. Vienas iš motyvų mokytis Leibnicui buvo noras perskaityti tėvo — teisės profesoriaus knygas. Keturiolikos metų Leibnicas — jau Leipcigo universiteto studentas. Vokietijos universitetuose galėjai gerai įsigilinti į filosofiją, tačiau į matematiką — menkai. Tad ir vienu žymiausiu savo amžiaus matematiku V. Leibnicas tapo savarankiškų studijų dėka. Tiesa, bendravo su žymiausiais matematikais Paryžiuje, visą gyvenimą susirašinėjo su maždaug 600 korespondentų. V. Leibnicas — vienas paskutinių genijų universalų. Viskas jam rūpėjo, viską jis išmanė. Ar mūsų amžiuje dar gali būti tokių žmonių?

I Išvestinės

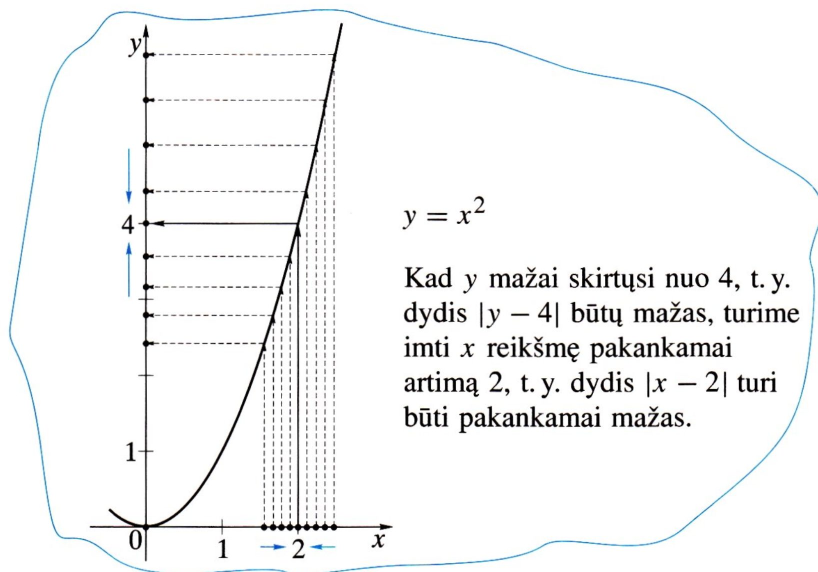
1. Ribos ir išvestinės

1.1. Funkcijos ribinės reikšmės

Įdėję į karšto vandens stiklinę termometrą ir nutarę stebėti, kaip vanduo vėsta, tarkime, dešimt minučių, baigiantis šiam terminui matytume, kad temperatūra artėja prie tam tikros reikšmės.
Jeigu kas nors paklaustų, ką reiškia teiginys:

„kai x reikšmė artėja prie 2, tai funkcijos $f(x) = x^2$ reikšmės artėja prie 4“,

tikriausiai bandytume paaiškinti nusibraižę grafiką.



Taigi intuityviai puikiai jaučiame, ką reiškia, kad „funkcijos reikšmės artėja prie tam tikro skaičiaus“. Tačiau matematikoje visos sąvokos turi būti tiksliai ir nedviprasmiškai apibrėžtos.
Ką, pavyzdžiui, reiškia žodis „artėja“? Juk kai apibrėžiame funkciją formule arba nubrėžiame jos grafiką, niekas nepradeda nei judėti, nei artėti. Žodžiais

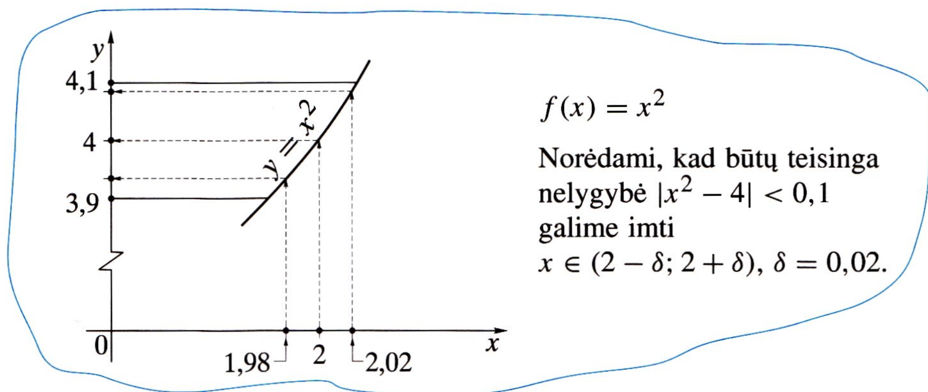
„x artėja prie 2“

tiesiog norime pasakyti, kad imame x reikšmes vis artimesnes ir artimesnes skaičiui 2. Patyrinėkime, kaip teiginį „artėjant x reikšmei prie 2, funkcijos $f(x) = x^2$ reikšmės artėja prie 4“ galima užrašyti matematinėmis formulėmis.

Iš pradžių galime tiesiog pasirinkti keletą artimų skaičiui 2 kintamojo x reikšmių, apskaičiuoti atitinkamas funkcijos reikšmes ir pažiūrėti, kiek jos skiriasi nuo skaičiaus 4.

x	1,97	1,98	1,99 $\rightarrow$	2	$\leftarrow$ 2,01	2,02	2,03
x^2	3,8809	3,9204	3,9601	4	4,0401	4,0804	4,1209
$\lvert x^2 - 4 \rvert$	0,1191	0,0796	0,0399	0	0,0401	0,0804	0,1209

Patyrinėję šią lentelę galime padaryti, pavyzdžiui, tokią išvadą: norėdami, kad funkcijos $f(x) = x^2$ reikšmės skirtųsi nuo 4 mažiau kaip 0,1, t. y. kad būtų teisinga nelygybė $|f(x) - 4| < 0{,}1$, galime imti x reikšmes iš intervalo (1,98; 2,02).
Šis intervalas yra simetriškas skaičiaus 2 atžvilgiu. Pažymėję $\delta = 0{,}02$, jį galime užrašyti taip: $(2 - \delta; 2 + \delta)$. Visus šio intervalo skaičius galime nusakyti nelygybe $|x - 2| < \delta$.
Iš tos pačios lentelės matyti, kad norėdami, jog $f(x) = x^2$ reikšmės tenkintų nelygybę $|f(x) - 4| < 0{,}05$, galime imti x reikšmes iš intervalo (1,99; 2,01), t. y. iš intervalo $(2 - \delta; 2 + \delta)$ su $\delta = 0{,}01$.



Jeigu norėtume, kad $f(x) = x^2$ reikšmės skirtųsi nuo 4 mažiau kaip viena šimtąja, taip pat galėtume nurodyti intervalą $(2 - \delta; 2 + \delta)$, iš kurio galėtume imti x reikšmes.

1 užduotis. Suraskite visas teigiamas x reikšmes, su kuriomis teisinga nelygybė $|x^2 - 4| < 0{,}01$. Nurodykite kokį nors simetrišką skaičiaus 2 atžvilgiu šios nelygybės sprendinių intervalą.

Aišku, kad šį uždavinį galima spręsti ne tik su skaičiais 0,1 bei 0,01, bet ir su bet kokiais, kiek norime mažais skaičiais, pavyzdžiui, su visais skaičiais 10^{-n}, $n = 1, 2, \ldots$ Kad ir kokį mažą skaičių 10^{-n} paimtume, vistiek būtų galima nurodyti simetrišką intervalą $(2 - \delta; 2 + \delta)$, sudarytą iš nelygybės $|x^2 - 4| < 10^{-n}$ sprendinių. Čia $\delta > 0$ yra mažas skaičius; kiekvienai n reikšmei δ vis kitoks.
Šie sakiniai išreiškia matematinę teiginio „kai x artėja prie 2, tai $f(x) = x^2$ artėja prie 4“ prasmę. Sakome, kad skaičius 4 yra funkcijos $f(x) = x^2$ ribinė reikšmė (arba

tiesiog riba), kai x artėja prie 2 ir simboliškai rašome:

$$\text{kai } x \to 2, \text{ tai } f(x) \to 4 \quad \text{arba} \quad \lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

Panašiai galima paaiškinti, pavyzdžiui, matematinę teiginio „kai x artėja prie -2, tai $f(x) = x^3$ artėja prie -8“ prasmę, ir apskritai — teiginio „kai x artėja prie a, tai $f(x)$ artėja prie A“ prasmę.

Jeigu kintamajam x artėjant prie a, funkcijos f(x) reikšmės artėja prie A, tai simboliškai rašome:

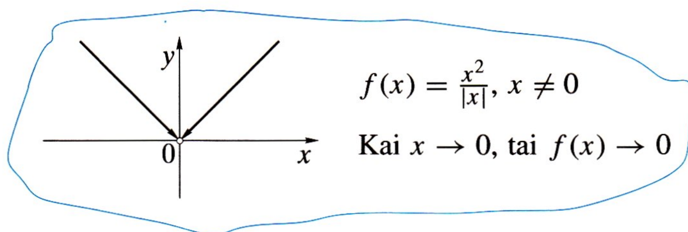
$$\text{kai } x \to a, \text{ tai } f(x) \to A \quad \text{arba} \quad \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Skaičių A vadiname ribine funkcijos f(x) reikšme, kai x artėja prie a (arba tiesiog funkcijos riba, kai x → a).

Kartais pati funkcija $f(x)$ gali būti neapibrėžta su $x = a$, tačiau $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ egzistuoja.

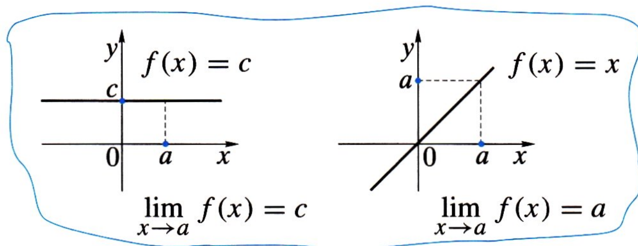
Panagrinėkime, pavyzdžiui, funkciją $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ $(x \neq 0)$.

Kai $x = 0$, ši funkcija yra neapibrėžta, tačiau nubraižę grafiką įsitikinsime, kad $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.



Rasti paprastų funkcijų ribas nesudėtinga.

Pavyzdžiui, jei funkcija $f(x)$ visoms x reikšmėms priskiria tą patį skaičių c, t. y. $f(x) = c$, tai šis skaičius yra ir funkcijos riba, kai x artėja prie a. Taip pat akivaizdu, kam lygios funkcijos $f(x) = x$ ribos.



Kai funkcijos $f(x), g(x)$ apibrėžtos toje pat aibėje, tai toje aibėje galime nagrinėti funkcijas

$$f(x)+g(x), \qquad f(x)\cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Suformuluosime teiginius apie šių funkcijų ribas.

Sakykime, kad kai $x \to a$, tai $f(x) \to A$, $g(x) \to B$. Tada, kai $x \to a$:
1) $f(x)+g(x) \to A+B$;
2) $f(x)\cdot g(x) \to A\cdot B$;
3) *jei* $B \neq 0$, *tai* $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$.

Žinoma, šias savybes galima suformuluoti ir naudojant ribos žymenį lim. Pavyzdžiui, pirmąją savybę galime užrašyti taip:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Šiomis savybėmis dažnai naudojamasi skaičiuojant funkcijų ribines reikšmes.

1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+x^2+x)$.

Tikriausiai iš karto pasakysite, kad ši riba lygi 3. Kaip ją gavote? Į reiškinį x^3+x^2+x įstatėte $x=1$ ir apskaičiavote jo reikšmę? Ar visada skaičiuojant ribą pakanka įstatyti atitinkamą a reikšmę ir apskaičiuoti funkcijos reikšmę? Ne, nevisada. Kada gi galima, o kada ne?
Kartais gauti teisingą atsakymą nesunku, bet nelengva jį pagrįsti.
Todėl panagrinėkime šį pavyzdį, stengdamiesi pagrįsti kiekvieną žingsnį.
Žinome, kad $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$. Pasinaudoję antrąja ribų savybe, gausime:

$$\lim_{x\to 1} x^2 = \lim_{x\to 1}(x\cdot x) = \lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1} x = 1\cdot 1 = 1,$$

$$\lim_{x\to 1} x^3 = \lim_{x\to 1} x^2 \cdot \lim_{x\to 1} x = 1\cdot 1 = 1.$$

Dabar pasinaudoję pirmąja ribų savybe, gausime:

$$\lim_{x\to 1}(x^3+x^2+x) = \lim_{x\to 1}(x^3+x^2) + \lim_{x\to 1} x = \lim_{x\to 1} x^3 + \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} x = 1+1+1 = 3.$$

2 užduotis. Sekdami 1 pavyzdžiu, apskaičiuokite
$\lim\limits_{x\to -2}(x^4+3x^2+8)$.

2 PAVYZDYS. Apskaičiuokime $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Jeigu bandytume skaičiuoti ribą tiesiog įstatydami į reiškinį $x = 2$, mums nepasisektų. Iš tikrųjų, $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$, todėl trečiosios ribų savybės taikyti negalime. Pabandykime išskaidyti reiškinio skaitiklį dauginamaisiais:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

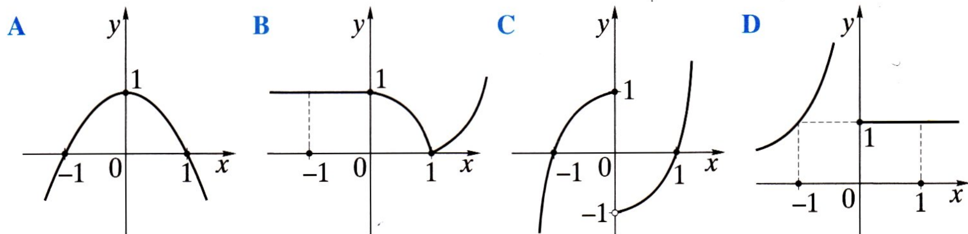
Taigi

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-3) = -1.$$

3 užduotis. Apskaičiuokite $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+4x}{x^2+3x-4}$.

Pratimai ir uždaviniai

1. Pavaizduoti funkcijų grafikai:



Nurodykite, kurioms funkcijoms teisinga lygybė:

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$; b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$;

c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$; d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$.

2. Raskite x reikšmes, su kuriomis funkcijos $f(x)$ reikšmės tenkina nurodytas nelygybes. Pažymėkite šias reikšmes Ox ašyje:

a) $f(x) = x$, $|f(x)-2| < 1$, $|f(x)-2| < 0{,}5$, $|f(x)-2| < 0{,}1$;

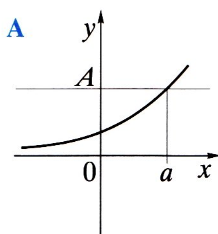
b) $f(x) = -2x$, $|f(x)+1| < 1$, $|f(x)+1| < 0{,}5$, $|f(x)+1| < 0{,}1$.

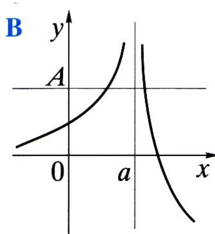
3. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką. Išspręskite nelygybę $|f(x)-2| < 0{,}1$ ir sprendinius pažymėkite brėžinyje:

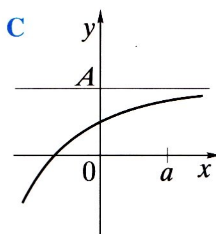
a) $f(x) = 2x - 1$; b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$;

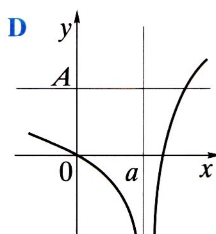
c) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; d) $f(x) = -2x + 1$.

4. Pavaizduoti kelių funkcijų grafikai:









Nurodykite, kurioms funkcijoms:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ egzistuoja; b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$; c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ neegzistuoja.

5. Pateikite funkcijų $f(x)$ pavyzdžių, kad būtų teisinga lygybė:

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$; b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$; d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$.

Nubraižykite tokių funkcijų grafikus.

6. Apskaičiuokite funkcijos ribą. Nubraižykite funkcijos grafiką. Pažymėkite ribines argumento ir funkcijos reikšmes:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)$; b) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x)$; c) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2$; d) $\lim\limits_{x\to -2}(x+1)^3$.

7. Raskite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-1}{3x-4}$; c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-x+2}{x^2+x+1}$; d) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2-1}{x^2-3}$.

8. Raskite funkcijos ribą. Nubraižykite funkcijos grafiką:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$; *c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$; *d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$.

9. Raskite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}{x-3}$; *d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x+9}-2}{x+1}$.

Patarimas. Pertvarkykite reiškinius taip, kad šaknys atsidurtų vardikliuose.

---

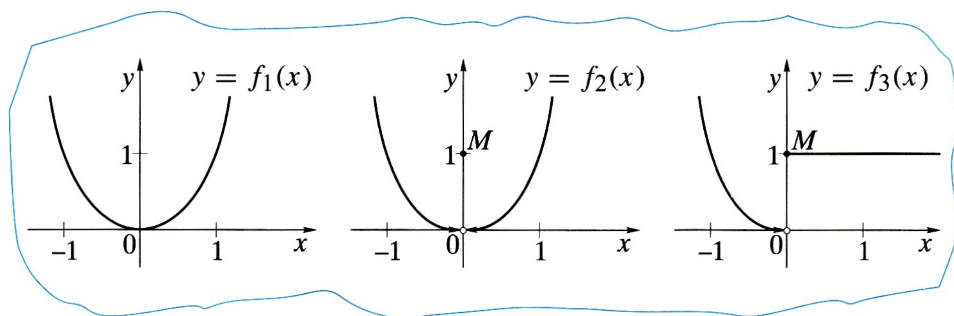
10. Paaiškinkite, kodėl neegzistuoja riba:

a) $\lim\limits_{x\to 2}[x]$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\{x\}$; *c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x|x-1|}{x-1}$.

1.2. Tolydžios funkcijos

Nubraižykime grafikus trijų funkcijų:

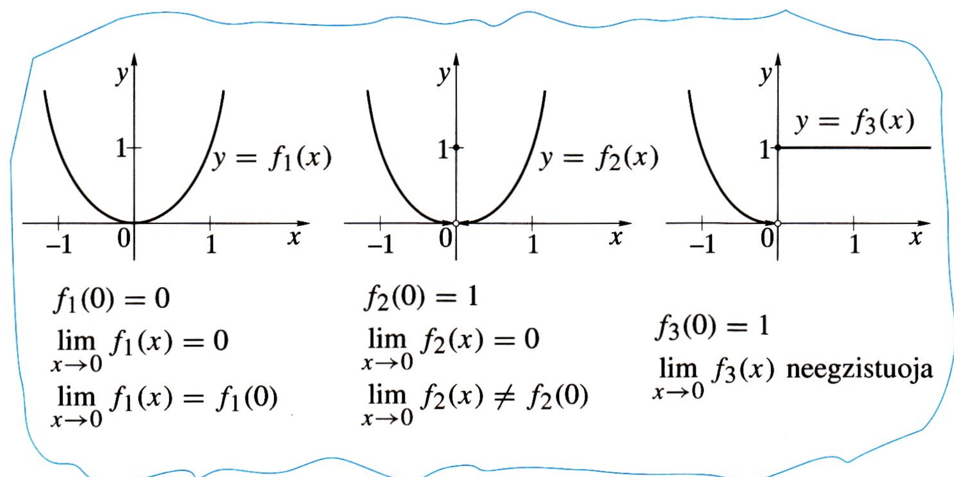
$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kai } x \neq 0, \\ 1, & \text{kai } x = 0; \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kai } x < 0, \\ 1, & \text{kai } x \geqslant 0. \end{cases}$$



Brėždami funkcijų grafikus skirtingai elgėmės žymėdami tašką su $x = 0$. Pirmuoju atveju nieko ypatingo neįvyko: neatitrūkdamas nuo plokštumos pieštuko smaigalys perėjo tašką $O(0; 0)$ ir tiek. Antruoju atveju priartėję prie taško $O(0; 0)$ turėjome šoktelti į viršų, pažymėti tašką $M(0; 1)$ ir sugrįžti atgal. Trečiuoju atveju šoktelėję į viršų, pažymėjome tašką $M(0; 1)$ ir toliau brėžėme grafiką jau nepakeldami pieštuko smaigalio nuo plokštumos.

Taigi funkcijų $f_2(x)$ ir $f_3(x)$ grafikai yra „sutrūkę“ taške 0, o funkcijos $f_1(x)$ — ne. Sakoma, kad funkcija $f_1(x)$ yra tolydi taške $x = 0$, o $f_2(x)$ ir $f_3(x)$ — trūkios šiame taške.

Kaip griežtai matematiškai galima apibrėžti funkcijos tolydumo sąvoką? Palyginkime nagrinėtų funkcijų reikšmes taške $x = 0$ su šių funkcijų ribinėmis reikšmėmis, kai $x \to 0$.



Taigi esminė tolydžios taške $x = 0$ funkcijos $f_1(x)$ ypatybė, skirianti ją nuo trūkių taške $x = 0$ funkcijų $f_2(x)$ ir $f_3(x)$, yra tokia: kai $x \to 0$, tai $f_1(x) \to f_1(0)$; kitaip tariant, $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = f_1(0)$.

APIBRĖŽIMAS

Tarkime, kad funkcija $f(x)$ yra apibrėžta intervale $(a; b)$ ir x_0 yra šio intervalo skaičius. Sakoma, kad funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0, jeigu jos ribinė reikšmė, kai $x \to x_0$, sutampa su funkcijos reikšme šiame taške, t. y.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Jeigu funkcija $f(x)$ yra tolydi kiekviename intervalo $(a; b)$ taške, tai sakome, kad ji yra tolydi šiame intervale.

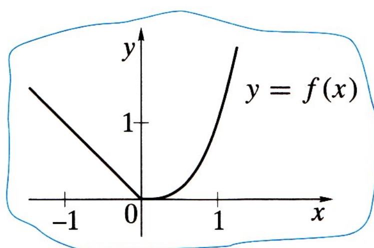
Kokiuose taškuose funkcija yra tolydi, o kokiuose — trūki, paprastai nesunku pasakyti pažiūrėjus į funkcijos grafiką.

1 PAVYZDYS. Funkcija $f(x) = x^2$ yra apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$ ir visuose taškuose tolydi. Iš tikrųjų, su bet kokiu skaičiumi a teisinga lygybė: $\lim\limits_{x\to a} x^2 = \lim\limits_{x\to a} x \cdot \lim\limits_{x\to a} x = a \cdot a = a^2$, t. y. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2 PAVYZDYS. Ištirkime funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ x^3, & \text{kai } x > 0, \end{cases}$$

tolydumą. Nubraižykime grafiką.



Jei $a > 0$, tai $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x^3 = a^3 = f(a)$.

Jei $a < 0$, tai $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} (-x) = -a = f(a)$.

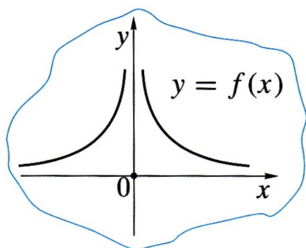
Jei $a = 0$, tai $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Tai matyti iš grafiko.

Taigi funkcija $f(x)$ tolydi visuose taškuose.

3 PAVYZDYS. Ištirkime tolydumą funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{kai } x \neq 0, \\ 0, & \text{kai } x = 0. \end{cases}$$

Nubraižę grafiką matome, kad vienintelis taškas, kuriame funkcija trūki, yra $x = 0$. Visuose kituose taškuose funkcija yra tolydi. Taigi funkcija yra tolydi intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(0; +\infty)$.



Užduotis. Pasakykite, kokiuose taškuose funkcija $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ yra tolydi, o kokiuose trūki.

Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra apibrėžtos ir tolydžios intervale $(a; b)$. Tada funkcijos

$$f(x) + g(x) \quad \text{ir} \quad f(x) \cdot g(x)$$

taip pat yra tolydžios intervale $(a; b)$. Jei $g(x) \neq 0$, kai $x \in (a; b)$, tai ir funkcija

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

yra tolydi intervale $(a; b)$.

4 PAVYZDYS. Žinome, kad funkcija $f(x) = x$ yra tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje. Tada funkcija $g(x) = x^2 = x \cdot x$ taip pat tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje. Apskritai, su bet kokiu $m = 1, 2, \ldots$ funkcija $h(x) = x^m$ yra tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje.

Remdamiesi tolydžių funkcijų savybėmis gauname, kad, pavyzdžiui, daugianariai

$$p_1(x) = 2x + 3, \quad p_2(x) = -5x^4 + 3x^2 + 1$$

yra visoje skaičių aibėje tolydžios funkcijos.

Apskritai, bet kuris daugianaris

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(čia n yra natūralusis skaičius, o a_i — realieji skaičiai) yra tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje funkcija.

5 PAVYZDYS. Dviejų daugianarių dalmuo

$$f(x) = \frac{x^5 + x^4 - 3x}{x^2 - 4x + 3}$$

yra funkcija, apibrėžta su visais x, išskyrus tas x reikšmes, su kuriomis $x^2 - 4x + 3 = 0$. Išsprendę šią lygtį gauname, kad funkcija apibrėžta visuose taškuose x, $x \neq 1$, $x \neq 3$, t. y. jos apibrėžimo sritį sudaro intervalų $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; +\infty)$ sąjunga. Kiekviename iš šių intervalų funkcija yra tolydi. Iš tikrųjų, bet kuriame iš šių intervalų funkcijos

$$p_1(x) = x^5 + x^4 - 3x \quad \text{ir} \quad p_2(x) = x^2 - 4x + 3$$

yra tolydžios. Tada ir jų dalmuo, t. y.

$$f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)},$$

yra bet kuriame iš šių intervalų tolydi funkcija. Trumpai sakome, kad funkcija tolydi visoje apibrėžimo srityje.

Laipsninės, rodiklinės, logaritminės, trigonometrinės ir atvirkštinės trigonometrinės funkcijos yra tolydžios savo apibrėžimo srityse.

Pratimai ir uždaviniai

11. Kokiuose taškuose yra tolydi funkcija $f(x)$, kai:

a) $f(x) = 2x^3$; b) $f(x) = x^3 + 3x^2$;

c) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$; d) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$?

12. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką ir įsitikinkite, kad ji yra tolydi taške $x = 0$:

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ x^2 + 1, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{kai } |x| \geqslant 1, \\ 1, & \text{kai } |x| < 1; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \text{kai } x < 0, \\ 1, & \text{kai } x \geqslant 0. \end{cases}$

13. Ar funkcija $f(x)$ yra tolydi intervale $(0; 1)$:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; b) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

c) $f(x) = \frac{1}{2x}$; d) $f(x) = \lg(2 - x)$?

14. Ištirkite funkcijos $f(x)$ tolydumą. Nubraižykite jos grafiką:

a) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$; b) $f(x) = \frac{x^2-6x+8}{x-2}$;

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$; d) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$.

Patarimas. Pradėkite spręsti uždavinį nuo klausimo: ar negalėčiau funkcijos formulės suprastinti?

---

15. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką. Nurodykite, kur ji tolydi:

a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$; b) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$;

c) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$; d) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

16. Parinkite skaičių k taip, kad funkcija $f(x)$ būtų tolydi realiųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$. Nubraižykite jos grafiką.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + k, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ 3 - x, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{kai } x \leqslant 2, \\ 2x + k, & \text{kai } x > 2; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kai } x < k, \\ x + 2, & \text{kai } x \geqslant k; \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} kx, & \text{kai } x \leqslant k, \\ x^2 - 2x, & \text{kai } x > k. \end{cases}$

Patarimas. Jei nežinote nuo ko pradėti, tiesiog pasirinkite kokią nors k reikšmę ir nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką. Pažiūrėję į jį tikriausiai suprasite, kaip pasirinkti k, kad funkcija $f(x)$ būtų tolydi.

---

17. Nubraižykite funkcijos grafiką. Kuriuose taškuose ši funkcija nėra tolydi?

a) $y = [\cos x]$; b) $y = \{\sin x\}$;

c) $y = [x]^2$; d) $y = [x^2]$.

18. Dviejų trūkių taške x_0 funkcijų suma gali būti trūki, bet gali būti ir tolydi taške x_0. Panagrinėkite sumą $h(x) = f(x) + g(x)$. Nustatykite, ar $h(x)$ yra tolydi, ar trūki funkcija, kai:

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{kai } x > 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ 2, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{kai } x > 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ -1, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$

1.3. Funkcijos reikšmių pokyčiai

Dažnai svarstome, kaip pasikeitus vieniems dydžiams pasikeis kiti. Jei padidinsime automobilio greitį, kiek sutrumpės kelionė? Kiek padidės degalų sąnaudos? O kiek išlaidos?

Tegu funkcija $f(x)$ yra apibrėžta kokiame nors intervale $(a; b)$ ir x_0 yra šio intervalo skaičius. Pakeiskime nepriklausomojo kintamojo reikšmę nuo x_0 iki x (padidinkime arba sumažinkime). Nepriklausomojo kintamojo pokytį įprasta žymėti Δx, čia Δ yra graikų abėcėlės raidė, atitinkanti lotyniškos abėcėlės raidę D (tariame delta x). Taigi

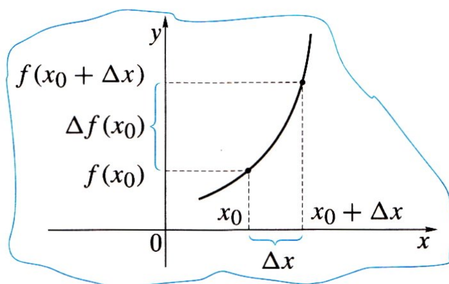
$$\Delta x = x - x_0, \quad x = x_0 + \Delta x.$$

Suradę skirtumą tarp funkcijos reikšmių $f(x_0 + \Delta x)$ ir $f(x_0)$ surasime, kiek pasikeitė funkcijos reikšmė.

APIBRĖŽIMAS

Skirtumą $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ vadiname funkcijos $f(x)$ reikšmių pokyčiu taške x_0, atitinkančiu kintamojo x pokytį Δx, ir žymime $\Delta f(x_0)$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$



Dažnai trumpumo dėlei vietoj „funkcijos reikšmių pokytis taške x_0“ sakome tiesiog „funkcijos pokytis taške x_0“.

1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = x^3$ reikšmių pokytį taške $x_0 = 1$, kai argumento x pokytis yra $\Delta x = 0{,}2$.

Atlikę paprastus skaičiavimus, gauname:

$$\Delta f(1) = f(1 + 0{,}2) - f(1) = 1{,}2^3 - 1^3 = 0{,}728.$$

Kai $x > 0$, tai funkcijos $f(x) = x^3$ reikšmė lygi tūriui kubo, kurio kraštinės ilgis yra x. Iš mūsų skaičiavimų matome: jeigu matuodami vienetinio kubo kraštinę suklysime ir padidinsime tikrąjį kraštinės ilgį dydžiu 0,2, tai skaičiuodami kubo tūrį padarysime paklaidą lygią net 0,728. Taigi kone padvigubinsime kubo tūrį.

1 užduotis. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = x^3$ reikšmių pokytį taške $x_0 = 1$, kai argumento x pokytis yra $\Delta x = -0{,}2$. Palyginkite jį su pokyčiu, atitinkančiu argumento pokytį $\Delta x = 0{,}2$.

Funkcijos reikšmių pokytis taške x_0 priklauso ir nuo x_0, ir nuo Δx. Imkime $x_0 = 1$ ir suraskime, kaip priklauso funkcijos $f(x) = x^2$ reikšmių pokytis nuo Δx reikšmių:

$$\Delta f(1) = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Kai Δx yra mažas, antrasis pokyčio $\Delta f(1)$ dėmuo $(\Delta x)^2$ yra žymiai mažesnis už pirmąjį dėmenį $2\Delta x$. Taigi funkcijos pokytis mažai skiriasi nuo $2\Delta x$. Pavyzdžiui, kai $\Delta x = 0{,}1$, tai $\Delta f(1) = 0{,}21$, o $2\Delta x = 0{,}2$; kai $\Delta x = 0{,}01$, tai $\Delta f(1) = 0{,}0201$, o $2\Delta x = 0{,}02$ ir t. t. Taigi kai Δx reikšmės yra mažos, tai

$$\Delta f(1) \approx 2\Delta x.$$

2 užduotis. Užrašykite funkcijos $f(x) = x^3$ reikšmių pokytį $\Delta f(2)$ pasinaudoję sumos kubo formule $(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$. Nurodykite, kokiam reiškiniui apytiksliai lygus šis pokytis, kai Δx įgyja labai mažas reikšmes.

2 PAVYZDYS. Raskime funkcijos $f(x) = \sin x$ reikšmių pokytį, kai $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Pritaikę sinusų skirtumo formulę, gauname:

$$\Delta f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \sin\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{3} + \Delta x + \frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{3} + \Delta x - \frac{\pi}{3}}{2} =$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Tokią pokyčio išraišką kažin ar pavadintume paprasta. Paieškokime apytikslės, tačiau paprastesnės pokyčio išraiškos. Samprotaukime taip: kai Δx mažas, $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right) \approx$ $\approx \cos\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{\Delta x}{2}$ tikriausiai nedaug skiriasi nuo $\frac{\Delta x}{2}$. Taigi:

$$\Delta f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{2}\Delta x.$$

Naudodamiesi skaičiuokliu šiek tiek paskaičiuokime. Imkime mažas Δx reikšmes, apskaičiuokime $\Delta f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ir palyginkime su $\frac{1}{2}\Delta x$:
kai $\Delta x = 0{,}1$, tai $\Delta f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}045590...$, o $\frac{1}{2}\Delta x = 0{,}05$;
kai $\Delta x = 0{,}01$, tai $\Delta f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}0049566...$, o $\frac{1}{2}\Delta x = 0{,}005$
ir t. t. Taigi skaičiuojant pagal apytikslę formulę gauname maždaug tą patį, kaip ir pagal tikslią.

3 užduotis. Panašiai kaip 2 pavyzdyje užrašykite funkcijos $f(x) = \cos x$ pokyčio $\Delta f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ formulę. Pabandykite surasti paprastą apytikslę pokyčio išraišką, gerai tinkančią mažiems Δx.
Pasirinkite keletą mažų Δx reikšmių, pasinaudoję skaičiuokliu apskaičiuokite $\Delta f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ir palyginkite su reikšmėmis, gautomis iš apytikslės pokyčio išraiškos.

Pratimai ir uždaviniai

19. Apskaičiuokite:

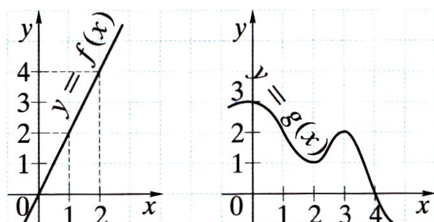
a) $f(2)$, kai $f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{1}{x-1}$;

b) $f(1) - f(0)$, kai $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 + 1}$;

c) $2f(3) - 3f(2)$, kai $f(x) = x^2 - 5x + 5$;

d) $f^2(1) - f^2(0)$, kai $f(x) = \sqrt{(x+1)(x+2)}$.

20. Pavaizduoti funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai.



Iš brėžinio raskite:

a) $\Delta f(1)$, kai $\Delta x = 1$;

b) $\Delta f(0)$, kai $\Delta x = 2$;

c) $\Delta g(0)$, kai $\Delta x = 2$;

d) $\Delta g(1)$, kai $\Delta x = 3$.

21. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ reikšmių pokytį, kai $\Delta x = 0{,}1$:

a) $\Delta f(0)$; b) $\Delta f(1)$; c) $\Delta f(2)$; d) $\Delta f(3)$.

Nubraižykite šios funkcijos grafiką, pažymėkite argumento ir funkcijos reikšmių pokyčius.

22. Įrodykite, kad funkcijos $f(x) = ax + b$ reikšmių pokytis taške x_0 išreiškiamas lygybe $\Delta f(x_0) = a\Delta x$.

23. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = 2x - x^2$ reikšmių pokytį, kai $\Delta x = 0{,}1$:

a) $\Delta f(0)$; b) $\Delta f(1)$; c) $\Delta f(2)$.

Nubraižykite funkcijos grafiką, pažymėkite argumento ir funkcijos reikšmių pokyčius.

24. Vertikaliai aukštyn sviesto akmens aukščio virš žemės (išreikšto metrais) priklausomybę nuo laiko (sekundėmis) nusako funkcija

$$h(t) = 1 + 12t - 2t^2.$$

1) Raskite:

a) laiko momentą, kada akmuo bus 1 metro aukštyje;

b) laiko momentą, kada akmuo bus aukščiausiai pakilęs ir didžiausią pakilimo aukštį;

c) kaip pakito akmens padėtis per pirmąsias dvi sekundes;
d) $\Delta h(1)$, kai $\Delta t = 2$;
e) $\Delta h(2)$, kai $\Delta t = 2$. Paaiškinkite gauto dydžio fizikinę prasmę;
f) kokį kelią nuskriejo akmuo per 4 pirmąsias sekundes.

2) Ką galite pasakyti apie akmens padėtį praėjus 7 sekundėms nuo metimo momento?

25. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{1}{x}$ reikšmių pokytį $\Delta f(x_0)$, kai:

a) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$;
b) $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}01$;
c) $x_0 = 10$, $\Delta x = 0{,}01$;
d) $x_0 = 10$, $\Delta x = -0{,}01$.

26. Funkcijos reikšmių didėjimo (arba mažėjimo) apibrėžimą naudojant funkcijos reikšmių pokyčio sąvoką galima suformuluoti taip:
Jei kiekviename intervalo I taške teigiamą argumento pokytį atitinka teigiamas funkcijos reikšmių pokytis, tai funkcija tame intervale yra didėjanti; jei funkcijos reikšmių pokytis neigiamas — mažėjanti.
Naudodamiesi funkcijos pokyčiais įrodykite, kad funkcija $f(x)$ intervale I yra didėjanti:

a) $f(x) = x^2$, $I = (0; +\infty)$;
b) $f(x) = x^2 - x$, $I = (1; +\infty)$;
c) $f(x) = x^3$, $I = (-\infty; +\infty)$;
d) $f(x) = \sin x$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
e) $f(x) = \log_2 x$, $I = (0; +\infty)$;
f) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Pavyzdys. Įrodykime, pavyzdžiui, kad intervale $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ funkcija $f(x) = \log_2(2x - 1)$ yra didėjanti.
Apskaičiavę funkcijos $f(x)$ pokytį su $\Delta x > 0$, gauname:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \log_2\big(2(x + \Delta x) - 1\big) - \log_2(2x - 1) =$$
$$= \log_2 \frac{2(x + \Delta x) - 1}{2x - 1} = \log_2 \frac{2x - 1 + 2\Delta x}{2x - 1} = \log_2\left(1 + \frac{2\Delta x}{2x - 1}\right).$$

Kadangi $\Delta x > 0$ ir $x > \frac{1}{2}$, tai $1 + \frac{2\Delta x}{2x-1} > 1$. Todėl šio reiškinio logaritmas teigiamas. Taigi $\Delta f(x) > 0$ ir funkcija $f(x)$ intervale $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ yra didėjanti.

---

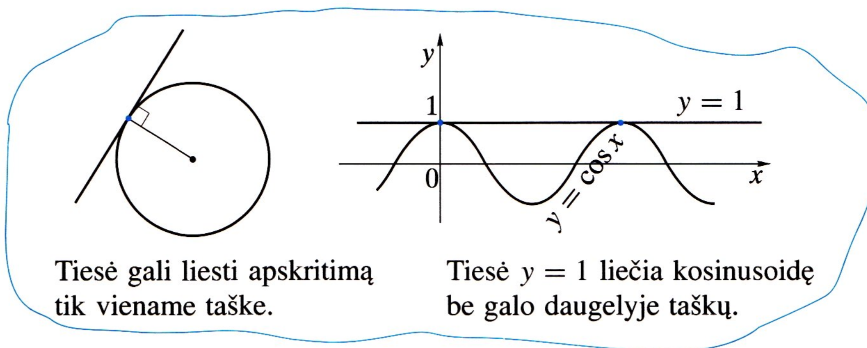
27. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ intervale I yra mažėjanti:

a) $f(x) = -2x + 10$, $I = (-\infty; +\infty)$;
b) $f(x) = x^2 + 2x$, $I = (-\infty; -2)$;
c) $f(x) = \cos x$, $I = (0; \pi)$;
d) $f(x) = 2^{-x}$, $I = (-\infty; +\infty)$;
e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $I = (0; +\infty)$;
f) $f(x) = \sin x$, $I = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

1.4. Funkcijos grafiko liestinės ir funkcijos išvestinė

Tiesė, turinti su apskritimu vienintelį bendrą tašką, vadinama to apskritimo liestine. Tačiau toks liestinės apibrėžimas netinka daugeliui kitų kreivių. Pavyzdžiui, tiesę $y = 1$ natūralu laikyti kosinusoidės $y = \cos x$ liestine taške $x = 0$, $y = 1$. Tačiau ši tiesė su kosinusoide turi be galo daug taškų.

Kita vertus, tiesė $x = 0$ turi vienintelį bendrą tašką su kosinusoide. Bet šios tiesės kosinusoidės liestine juk nevadinsime!

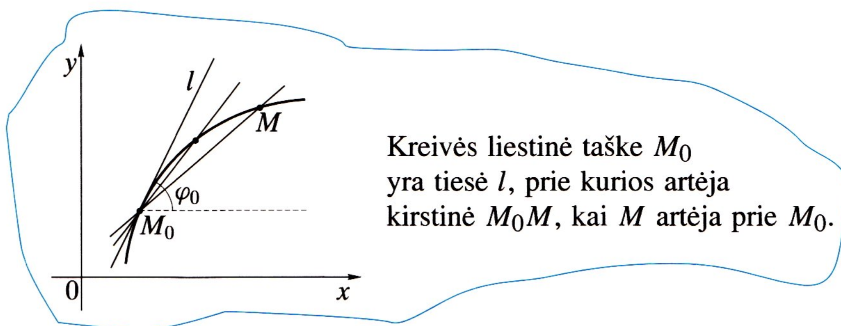


Tiesė gali liesti apskritimą tik viename taške.

Tiesė $y = 1$ liečia kosinusoidę be galo daugelyje taškų.

Apibrėšime kreivės liestinę taip, kad apibrėžimas tiktų visais atvejais.

Tarkime, koordinačių plokštumoje nubrėžta kreivė ir norime surasti jos liestinę taške M_0. Imkime kitą kreivės tašką M ir per taškus M_0 ir M nubrėžkime tiesę. Šią tiesę vadinsime kreivės kirstine. Jeigu taškui M artėjant prie M_0, kirstinė M_0M artėja prie tam tikros ribinės tiesės l, tai ši tiesė ir yra kreivės liestinė taške M_0. Ši ribinė tiesė turi būti ta pati — nesvarbu iš kurios pusės taškas M artėja prie M_0. Kirstinė M_0M artės prie ribinės tiesės, jeigu kampo φ, kurį ji sudaro su Ox ašimi, didumas artės prie tam tikros ribinės reikšmės φ_0.

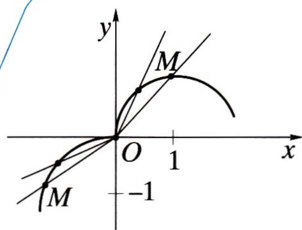


Kreivės liestinė taške M_0 yra tiesė l, prie kurios artėja kirstinė M_0M, kai M artėja prie M_0.

APIBRĖŽIMAS

Kreivės liestine taške M_0 vadiname tiesę, prie kurios artėja tiesė, einanti per kreivės taškus M_0 ir M, kai M artėja prie M_0.

Kai kuriuose taškuose kreivė gali neturėti liestinės. Panagrinėkime, pavyzdžiui, kreivę, sudarytą iš dviejų susikertančių apskritimų lankų. Šių lankų susikirtimo taške $O(0; 0)$ kreivės liestinės nėra.



Kreivė, sudaryta iš dviejų apskritimų lankų, taške $O(0; 0)$ liestinės neturi. Jei taškas M artėja prie O iš dešinės — kirstinė OM artėja prie tiesės $x = 0$; jei iš kairės – prie tiesės $y = 0$. Jeigu kreivė šiame taške turėtų liestinę, tai abiem atvejais kirstinė OM artėtų prie tos pačios tiesės.

Pastebėkime, kad naująjį liestinės apibrėžimą galime taikyti net tada, kai nagrinėjamoji kreivė yra tiesė. Tiesės liestinė kiekviename jos taške yra ta pati tiesė!

1 užduotis. Pasakykite, kuriuose taškuose turi liestinę kreivė, kuri yra funkcijos $y = |x^2 - 1|$ grafikas.

Tegu dabar $f(x)$ yra tolydi funkcija. Šios funkcijos grafikas yra netrūki kreivė. Tarkime, kad taške x_0 kreivė turi liestinę. Panagrinėsime, kaip galima užrašyti jos lygtį. Pasirinkime du kreivės taškus $M_0(x_0; f(x_0))$ ir $M(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$, čia $\Delta x \neq 0$ yra kintamojo x pokytis. Per taškus M_0 ir M nubrėžkime kreivės kirstinę. Užrašykime šios kirstinės lygtį. Lygtis bus tokia:

$$y = kx + l.$$

Surasime koeficientų k ir l reikšmes. Į lygtį $y = kx + l$ įstatykime $x = x_0$, $y = f(x_0)$ ir $x = x_0 + \Delta x$, $y = f(x_0 + \Delta x)$. Gausime dviejų lygčių sistemą su nežinomaisiais k ir l:

$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 + l, \\ f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + l. \end{cases}$$

Iš antrosios lygties atėmę pirmąją, gauname:

$$k \cdot \Delta x = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \qquad k = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Iš brėžinio matome, kad santykis $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ lygus tangentui kampo, kurį sudaro kirstinė su Ox ašimi. Pažymėję šį kampą φ, galime užrašyti, kad

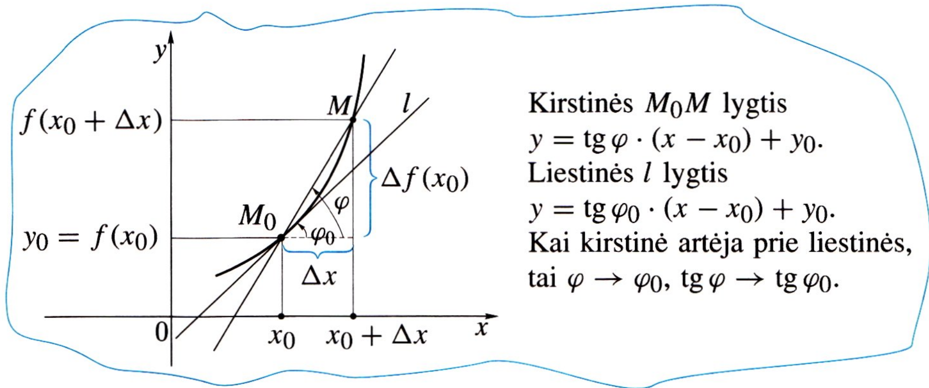
$$k = \operatorname{tg} \varphi.$$

Iš pirmos sistemos lygties suradę

$$l = f(x_0) - kx_0 = f(x_0) - \operatorname{tg}\varphi \cdot x_0$$

ir įstatę k ir l reikšmes į $y = kx + l$, gauname tokią kirstinės lygtį:

$$y = \operatorname{tg}\varphi \cdot x + f(x_0) - \operatorname{tg}\varphi \cdot x_0 \quad \text{arba} \quad y = \operatorname{tg}\varphi \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$



Taigi norint užrašyti kirstinės M_0M lygtį, pakanka žinoti taško M_0 koordinates ir tangentą kampo φ, kurį kirstinė sudaro su Ox ašimi. Norint užrašyti kreivės liestinės taške M_0 lygtį, pakanka žinoti taško M_0 koordinates ir tangentą kampo φ_0, kurį liestinė sudaro su Ox ašimi. Liestinės lygtis yra tokia:

$$y = \operatorname{tg}\varphi_0 \cdot (x - x_0) + y_0, \qquad y_0 = f(x_0).$$

Taško M_0 koordinates x_0 ir y_0 žinome. O kaip rasti $\operatorname{tg}\varphi_0$? Artėjant kirstinei prie liestinės, kampas φ artėja prie φ_0, o $\operatorname{tg}\varphi$ — prie $\operatorname{tg}\varphi_0$.
Kadangi

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

tai

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Vadinasi, ieškant kreivės liestinės krypties koeficiento (t. y. $\operatorname{tg}\varphi_0$), tenka skaičiuoti funkcijos reikšmių ir kintamojo reikšmių pokyčių santykio ribą. Ši svarbi riba vadinama funkcijos išvestine.

APIBRĖŽIMAS

Funkcijos $f(x)$ išvestine taške x_0 vadiname funkcijos pokyčio

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ir nepriklausomojo kintamojo pokyčio Δx santykio ribą, kai $\Delta x \to 0$. Ją žymime $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Jeigu funkcija $f(x)$ turi išvestinę taške $x = x_0$, dažnai sakoma, kad funkcija yra diferencijuojama šiame taške.

Matėme, kad funkcijos išvestinė taške x_0 turi paprastą geometrinę prasmę: skaičius $f'(x_0)$ lygus tangentui kampo, kurį funkcijos grafiko liestinė taške x_0 sudaro su Ox ašimi arba — kitaip tariant, $f'(x_0)$ yra šios liestinės krypties koeficientas.

Jeigu funkcija $f(x)$ taške $x = x_0$ turi išvestinę $f'(x_0)$, tai funkcijos grafikas taške $M_0(x_0;\ f(x_0))$ turi liestinę. Liestinės lygtis:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0, \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \quad y_0 = f(x_0).$$

PAVYZDYS. Parašykime funkcijos $f(x) = \frac{2}{x}$ grafiko liestinės taške $x_0 = 1$ lygtį. Liestinės lygtis yra tokia: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, čia $x_0 = 1$, $f(x_0) = \frac{2}{1} = 2$. Taigi tereikia surasti liestinės krypties koeficientą, t. y. išvestinę $f'(1)$. Naudodamiesi išvestinės apibrėžimu, gauname:

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2}{1+\Delta x} - 2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x(1 + \Delta x)} = -2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{1 + \Delta x}.$$

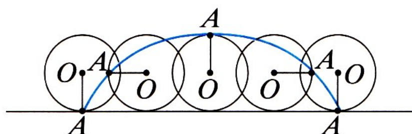
Kai $\Delta x \to 0$, tai $1 + \Delta x \to 1$ ir $\frac{1}{1+\Delta x} \to 1$. Taigi $f'(1) = -2$. Funkcijos grafiko liestinės lygtis:

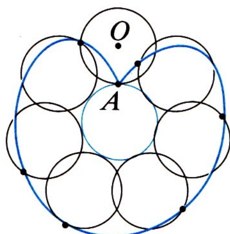
$$y = -2(x - 1) + 2, \quad y = -2x + 4.$$

2 užduotis. Parašykite funkcijos $f(x) = \frac{x}{1+x}$ liestinės taške $x_0 = 0$ lygtį.

Kreivės, kurias braižome, dažniausiai yra kokių nors funkcijų grafikai. Taigi — pirma funkcijos, paskui kreivės. Tačiau daug įdomių kreivių matematikoje atsirado kitaip. Pavyzdžiui, pasinaudojant judėjimo sąvoka.

Apskritimui riedant tiese, jo taškas A brėžia kreivę, kuri vadinama cikloide.





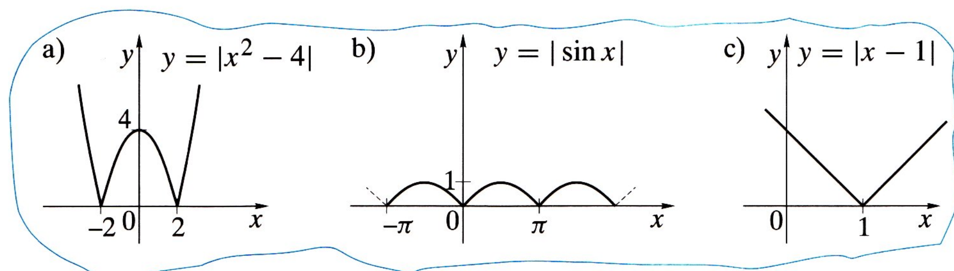
O jeigu apskritimą ridentume kitu to paties spindulio apskritimu?

Riedančio apskritimo taškas A brėžtų gražią širdies formos kreivę. Todėl ji ir vadinama kardioide (lot. *cordis* — širdis).

Pagalvokite, kokias kreives brėžtų apskritimo taškas, jei apskritimas riedėtų dvigubai (trigubai, keturgubai, ...) didesnio spindulio apskritimais. Tokios kreivės vadinamos epicikloidėmis.

Pratimai ir uždaviniai

28. Įsižiūrėkite į funkcijos grafiką ir pasakykite, kuriuose taškuose jis neturi liestinės:



29. Kuriuose taškuose funkcijos $f(x)$ grafikas neturi liestinės:

a) $f(x) = |x| + |x+1|$;

b) $f(x) = |x+1| - |x-1|$;

c) $f(x) = |x(x+1)|$;

d) $f(x) = \left|\frac{x+1}{x}\right|$?

30. Funkcijos $f(x)$ išvestinės $f'(x)$ reikšmė taške x_0 lygi funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės, nubrėžtos šiame taške, ir Ox ašies sudaromo kampo tangentui. Nusibraižykite funkcijos $f(x) = x(x-2)$ grafiką ir panagrinėję jį nustatykite, ar teisinga nelygybė:

a) $f'(1) < f'(2)$; b) $f'(0) > f'(2)$;

c) $f'(-1) < f'(1)$; d) $f'(2) < f'(3)$.

31. Raskite didumą kampo, kurį sudaro funkcijos $f(x)$ grafiko liestinė taške x_0 su Ox ašimi:

a) $y = x^2$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $x_0 = \sqrt{3}$.

32. Parašykite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės nurodytame taške lygtį. Nubraižykite funkcijos grafiką ir liestinę:

a) $f(x) = (x+1)^2$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = (x-1)^2$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = x^2 + 2x - 2$, $x_0 = 2$; d) $f(x) = x - 2x^2$, $x_0 = 0$.

33. Nustatykite, ar duotoji tiesė yra funkcijos $f(x) = x(4-x)$ grafiko liestinė:

a) $y = x$; b) $y = 2 - x$; c) $y = 4$;

d) $y = 2$; e) $y = 4x$; f) $y = 2x + 1$.

34. Parašykite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės nurodytame taške lygtį. Nubraižykite funkcijos grafiką ir liestinę:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, $x_0 = 2$;

c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x_0 = 2$; d) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, $x_0 = 1$.

35. a) Įrodykite, kad funkcijos

$f(x) = \frac{1}{x}$

grafiko liestinės, nubrėžtos taškuose $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$, yra lygiagrečios.

b) Įrodykite, kad funkcijos

$f(x) = x^2 - x$

grafiko liestinės, nubrėžtos taškuose $x_1 = 0$ ir $x_2 = 1$, yra statmenos.

Patarimas. Galite remtis teiginiais:
jei $k_1 = k_2$, tai tiesės $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$ yra lygiagrečios;
jei $k_1 \cdot k_2 = -1$, tai tiesės $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$ yra statmenos.
Tačiau galite ir neklausyti nei šio, nei kitų patarimų ir išspręsti uždavinius samprotaudami savaip!

1.5. Išvestinių skaičiavimo pavyzdžiai

Funkcijos $f(x)$ išvestine taške $x = x_0$ vadiname skaičių, kurį apibrėžiame lygybe

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \quad \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Paprastai funkcija turi išvestinę (yra diferencijuojama) ne viename taške. Dažnai ji turi išvestinę kiekviename apibrėžimo srities taške, kartais kai kuriuose taškuose išvestinė neegzistuoja. Priskyrę toms kintamojo x reikšmėms, su kuriomis išvestinė egzistuoja, jos reikšmę, gauname naują funkciją. Šią naują funkciją vadiname tiesiog funkcijos išvestine.

Naudojami keli funkcijos $y = f(x)$ išvestinės žymenys, pavyzdžiui,

$$f'(x), \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}, \quad y', \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Jeigu norime pažymėti išvestinės reikšmę viename taške x_0, rašome:

$$f'(x_0), \quad \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}, \quad y'(x_0), \quad \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x}.$$

1 PAVYZDYS. Raskime pačių paprasčiausių funkcijų $f(x) = c$, $g(x) = x$ išvestines. Funkcija $f(x)$ visoms nepriklausomo kintamojo reikšmėms priskiria tą patį skaičių c. Taigi funkcijos pokytis bet kuriame taške lygus nuliui:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0.$$

Todėl

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0.$$

Suraskime funkcijos $g(x) = x$ pokytį taške x:

$$\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x.$$

Todėl

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Taigi

$$c' = 0, \quad x' = 1.$$

2 PAVYZDYS. Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = x^2$ išvestinę.
Pirmiausia randame funkcijos pokytį:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Taigi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x).$$

Kai $\Delta x \to 0$, tai $2x + \Delta x \to 2x$. Todėl

$$f'(x) = 2x \quad \text{arba} \quad \left(x^2\right)' = 2x.$$

1 užduotis. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = 2x^2 - x$ išvestinę.

3 PAVYZDYS. Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ išvestinę.
Taikydami išvestinės apibrėžimą rašome:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Pokyčių santykį pertvarkykime taip:

$$\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Kai $\Delta x \to 0$, tai $x + \Delta x \to x$, $\sqrt{x + \Delta x} \to \sqrt{x}$. Vadinasi,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Taigi

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2 užduotis. Raskite tašką, kuriame funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ grafiko liestinė su Ox ašimi sudaro 45° kampą.

Pratimai ir uždaviniai

36. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę remdamiesi apibrėžimu:

a) $f(x) = 2x - 1$;

b) $f(x) = 3x - 2x^2$;

c) $f(x) = 2x - 3x^2$;

d) $f(x) = \sqrt{x+1}$;

e) $f(x) = \sqrt{2x+1}$;

f) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \boldsymbol{R}$;

g) $f(x) = \sqrt{ax+b}$, $a, b \in \boldsymbol{R}$;

h) $f(x) = \frac{a}{bx+c}$, $a, b, c \in \boldsymbol{R}$.

37. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę remdamiesi apibrėžimu:

a) $f(x) = \frac{2}{x+2}$;

b) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$;

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$;

d) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

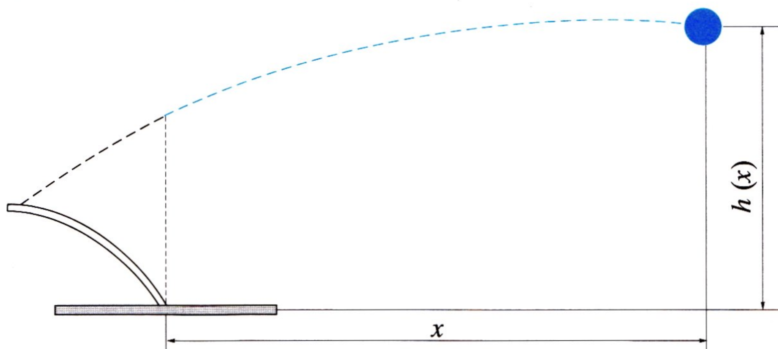
38. Įrodykite, kad diferencijuojamai funkcijai $f(x)$ teisinga lygybė:
$(f(x) + c)' = f'(x)$.

39. Senovės graikų katapultos paleistas akmuo skriejo trajektorija, aprašoma funkcija $h(x) = x - \frac{x^2}{100}$, $0 \leqslant x \leqslant 100$.

a) Kokiu kampu akmuo buvo paleistas?

b) Kokį didžiausią aukštį jis buvo pasiekęs?

c) Kokiu kampu jis nukrito?

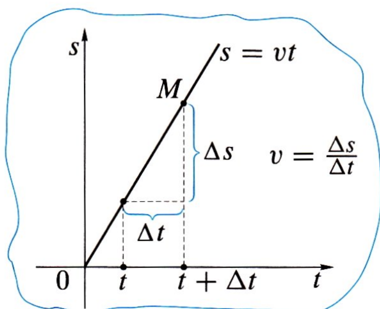


Kodėl funkcijos išvestinę matematikai žymi įvairiai?
Žymenys $f'(x)$, y' geri jau tuo, kad yra labai paprasti. Juos XVIII a. pabaigoje pradėjo naudoti Lagranžas. Pats Leibnicas išvestinę žymėjo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ arba $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.
Šie žymenys geri tuo, kad primena išvestinės apibrėžimą: išvestinė yra pokyčių santykio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ riba. Graikų abėcėlės raidės Δ, δ (delta) lotynų kalbos abėcėlėje atitinka raides D, d, taigi $\mathrm{d}y$ ar $\mathrm{d}f(x)$ yra tarsi prisiminimas apie pokyčius.
O Niutonas žymėjo funkcijos $y = f(x)$ išvestinę taip: $\dot{y}$. Ir šis žymuo kartais yra vis dar naudojamas.

1.6. Funkcijos išvestinė ir judėjimo greitis

Funkcijų išvestinių prisireikia ne tik nagrinėjant kreivių liestines.

Tegu $s(t)$ yra funkcija, reiškianti kūno (dar geriau — materialiojo taško) nueitą kelią per laikotarpį t, praėjusį nuo judėjimo pradžios. Sakysime tiesiog, kad $s(t)$ — kelias, nueitas iki laiko momento t; judėjimo pradžioje $t = 0$. Taigi, kai $t = 0$, tai $s(t) = 0$. Jeigu judėjimas vyksta pastoviu greičiu v, tai $s(t) = vt$ ir šios funkcijos grafikas yra tiesė. Tiesės krypties koeficientas yra greitis v.



Jeigu judėjimo greitis kinta kiekvieną akimirką, tai funkcijos $s(t)$ grafikas yra kreivė. Pavyzdžiui, laisvai krintančio kūno nueitas kelias reiškiamas funkcija

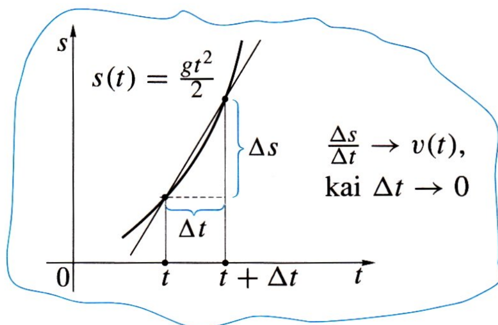
$$s(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Šios funkcijos grafikas yra parabolė.

Norėdami surasti vidutinį judėjimo greitį laikotarpiu nuo t iki $t + \Delta t$, turime išmatuoti nueitą kelią (s pokytį) $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ ir padalyti iš laiko pokyčio Δt. Taigi

$$v_{\text{vid}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Šis vidutinis greitis lygus funkcijos $s(t)$ grafiko kirstinės, einančios per taškus $M(t; s(t))$ ir $M(t + \Delta t; s(t + \Delta t))$, krypties koeficientui.



Jei Δt artinsime prie nulio, tai $v_{\text{vid}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ artės prie judėjimo greičio laiko momentu t (momentinio greičio $v(t)$). Kita vertus, santykio $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ riba, kai $\Delta t \to 0$, yra funkcijos $s(t)$ išvestinė:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t).$$

Taigi nueito kelio funkcijos $s(t)$ išvestinė yra funkcija, kurios reikšmė kiekviename taške lygi momentiniam judėjimo greičiui atitinkamu laiko momentu:

$$s'(t) = v(t).$$

Norėdami sužinoti, kiek pakito judėjimo greitis laikotarpiu nuo t iki $t + \Delta t$, turime apskaičiuoti funkcijos $v(t)$ pokytį:

$$\Delta v(t) = v(t + \Delta t) - v(t).$$

Santykis $\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}$ išreiškia vidutinį pagreitį, o jo riba, kai $\Delta t \to 0$ — momentinį pagreitį $a(t)$ laiko momentu t:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} \quad \text{arba} \quad a(t) = v'(t).$$

1 PAVYZDYS. Laisvai krintančio kūno nueitas kelias reiškiamas formule $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. Rasime momentinį kritimo greitį ir pagreitį.
Momentinis greitis yra kelio išvestinė, taigi

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{g}{2} \cdot \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \right) =$$

$$= \frac{g}{2} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = gt.$$

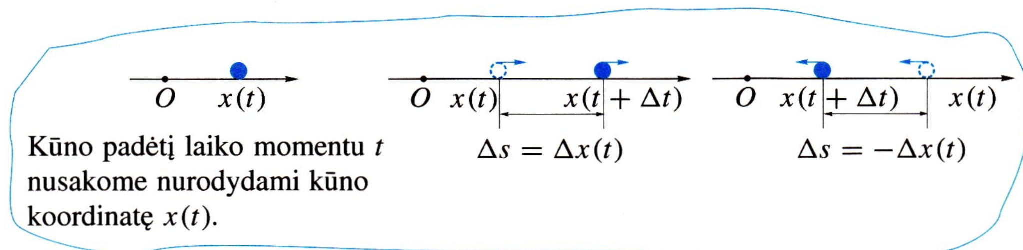
Pagreitis yra greičio išvestinė:

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - gt}{\Delta t} = g.$$

Jeigu funkcija $s(t)$ reiškia materialaus taško nueitą kelią iki laiko momento t, tai momentinis greitis $v(t)$ laiko momentu t lygus funkcijos $s(t)$ išvestinei, momentinis pagreitis $a(t)$ — funkcijos $v(t)$ išvestinei:

$$v(t) = s'(t), \quad a(t) = v'(t).$$

Tarkime dabar, kad kūnas (arba materialus taškas) juda tiese. Norėdami nusakyti jo padėtį tiesėje įveskime koordinačių sistemą: pažymėkime pradžios tašką O, pasirinkime ilgio matavimo vienetą. Tada kūno padėties kitimą laikui bėgant patogu nusakyti funkcija $x(t)$, reiškiančia kūno koordinatę laiko momentu t.



Kai kūnas juda tiesėje nurodyta kryptimi, tai

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) \quad (\Delta t > 0)$$

reiškia kelią Δs, kurį kūnas įveikė laikotarpiu nuo t iki $t + \Delta t$.
Taigi

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t), \quad x'(t) > 0.$$

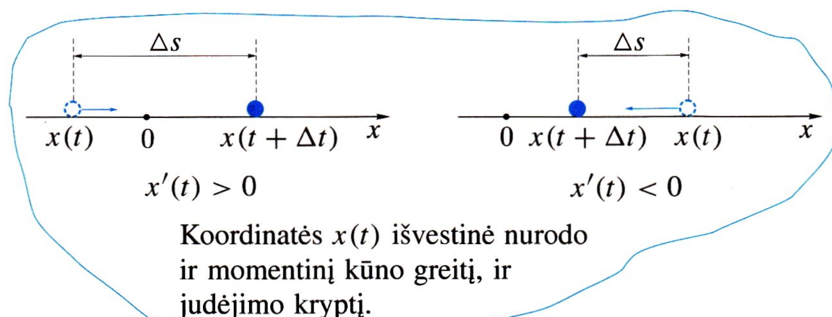
Jeigu kūnas juda kryptimi, priešinga tiesės krypčiai, tai

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) = -\Delta s.$$

Tada

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = -v(t), \quad x'(t) < 0.$$

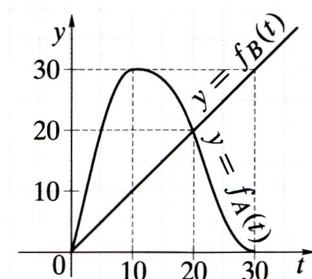
Taigi kūno koordinatės (kaip laiko funkcijos) $x(t)$ išvestinė ne tik parodo, koks yra momentinis kūno greitis, bet ir kokia judėjimo kryptis.
Dažnai kūno momentiniu greičiu vadinama pati kūno koordinatės $x(t)$ išvestinė. Tada greitis gali būti ir teigiamas, ir neigiamas. Ženklas parodo, kuria kryptimi juda kūnas.



Kai funkcija $f(x)$ nėra susijusi su fizikiniu judėjimu, kartais vistiek kalbame apie greičius. Sakome, kad funkcijos $f(x)$ išvestinė, kai $x = x_0$, parodo funkcijos reikšmių kitimo greitį šiame taške.

Pratimai ir uždaviniai

40. Du materialūs taškai A ir B juda Oy ašyje. Taškų padėtį Oy ašyje nusako pateikti funkcijų $y = f_A(t)$ ir $y = f_B(t)$ grafikai. Laikas matuojamas sekundėmis, atstumas — metrais.



Iš grafikų nustatykite:

a) kada abu taškai buvo vienodai nutolę nuo koordinačių pradžios taško;

b) kada atstumas tarp taškų buvo didžiausias;

c) kokie buvo abiejų taškų greičiai momentu $t = 10$;

d) koks buvo taško A greitis momentu $t = 30$;

e) kada A ir B judėjo viena kryptimi, kada — priešingomis kryptimis.

41. Tiese judančio kūno greitis nusakomas funkcija $v(t) = 3t + 2t^2$. Laikas matuojamas sekundėmis, greitis — centimetrais per sekundę. Koks kūno pagreitis laiko momentu $t = 4$?

42. Materialaus taško, judančio Oy ašyje, padėtį nusako funkcija $y(t) = 2t^2 + 1$. Raskite materialaus taško:

a) koordinates laiko momentais $t = 0$ ir $t = 5$;

b) vidutinį greitį laiko intervale $[0; 5]$;

c) greičius, kai $t = 0$ ir $t = 5$;

d) pagreitį.

43. Vertikaliai aukštyn išmesto akmens aukštį nusako funkcija $h(t) = at^2 + 3t + \frac{3}{2}$. Laikas matuojamas sekundėmis, aukštis — metrais. Raskite:

a) akmens aukštį metimo momentu ($t = 0$);

b) koeficientą a, jei žinoma, kad aukščiausiai akmuo bus pakilęs po 3 sekundžių;

c) po kiek laiko akmuo nukris;

d) vidutinį akmens greitį kylant aukštyn;

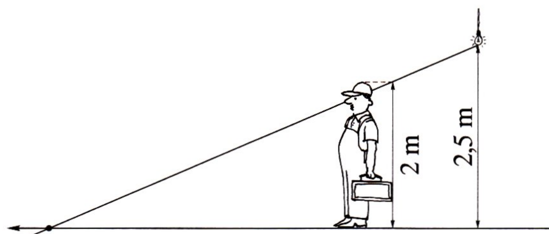
e) vidutinį akmens greitį krintant žemyn;

f) akmens greitį laiko momentais $t = 1$, $t = 2$, $t = 6$;

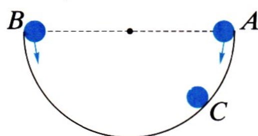
g) pagreitį.

44. Abscisių ašimi juda du materialūs taškai. Jų padėtys nusakomos koordinačių funkcijomis $x_1(t) = t^2 + 10t$, $x_2(t) = 2t^2 + 7t + 2$.
Raskite:
a) materialių taškų koordinates pradiniu momentu $t = 0$;
b) laiko momentus, kada tų taškų padėtys sutaps;
c) laiko momentus, kada abiejų taškų greičiai bus lygūs;
d) taškų pagreičius.

45. 2 m aukščio žmogus 5 km/h greičiu tolsta nuo lemputės, kabančios 2,5 m aukštyje. Kokiu greičiu juda žmogaus galvos šešėlis?



Tikriausiai įsitikinote, kad išvestinės yra puikus instrumentas kūnų judėjimo dėsniams nagrinėti. Viskas gana paprasta, kai kūnai juda tiesiomis trajektorijomis. Tačiau naujosios matematikos kūrėjams rūpėjo ir žymiai sudėtingesni judėjimo uždaviniai.



Įsivaizduokime, pavyzdžiui, pusapskritimio formos įdaubą, kuria ridinėjasi kamuoliukas. Paleistas riedėti iš taško A jis po tam tikro laiko pasieks tame pačiame aukštyje esantį tašką B (trinties nepaisykime) ir ims riedėti atgal. Taigi kamuoliukas „švytuos“ su periodu T_1. O jeigu kamuoliuką riedėti paleistume iš kito taško C, ar švytavimo periodas T_2 bus tas pats?
Pasirodo, kad ne! Kokios gi formos turėtų būti įdauba, kad švytavimo periodas nepriklausytų nuo to, iš kokio aukščio paleisime kamuoliuką? Cikloidės formos! Tai nustatė olandų mokslininkas Kristianas Hiuigensas (1629–1695) ir pasinaudojęs šia cikloidės savybe sukonstravo pirmąjį svyruoklinį laikrodį.

1.7. Dvi išvestinių skaičiavimo taisyklės

Padauginę funkciją $f(x)$ iš realiojo skaičiaus a, gauname naują funkciją

$$g(x) = a \cdot f(x),$$

apibrėžtą toje pat aibėje, kaip ir funkcija $f(x)$. Suraskime šios funkcijos reikšmių pokytį taške x:

$$\begin{aligned}\Delta g(x) &= g(x + \Delta x) - g(x) = af(x + \Delta x) - af(x) = \\ &= a\bigl(f(x + \Delta x) - f(x)\bigr) = a\Delta f(x).\end{aligned}$$

Taigi funkcijos $g(x)$ reikšmių pokyčius gauname daugindami $f(x)$ reikšmių pokyčius iš skaičiaus a. Įsitikinsime, kad funkcijos $g(x)$ išvestinė, kai ji egzistuoja, irgi randama panašiai.

TEOREMA
Tegu funkcija $f(x)$ yra diferencijuojama taške x, t. y. turi išvestinę, o a yra realusis skaičius. Tada funkcija $g(x) = af(x)$ irgi yra diferencijuojama taške x, be to,

$$g'(x) = af'(x), \quad t.\,y. \quad \bigl(af(x)\bigr)' = af'(x).$$

Įrodymas. Norėdami surasti funkcijos $g(x)$ išvestinę, turime sudaryti funkcijos pokyčio $\Delta g(x)$ ir nepriklausomojo kintamojo pokyčio Δx santykį ir surasti šio santykio ribą, kai $\Delta x \to 0$. Jau matėme, kad $\Delta g(x) = a\Delta f(x)$. Taigi

$$\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = a \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Tada

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(a \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right) = a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = af'(x).$$

1 PAVYZDYS. Žinome, kad $(x^2)' = 2x$. Todėl, pavyzdžiui,

$$\bigl(3x^2\bigr)' = 3 \cdot \bigl(x^2\bigr)' = 3 \cdot 2x = 6x, \quad \bigl(-2x^2\bigr)' = (-2) \cdot \bigl(x^2\bigr)' = -4x.$$

Jeigu dvi funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos toje pat nepriklausomojo kintamojo x reikšmių aibėje, tai sudėję funkcijų reikšmes, gauname naują funkciją

$$h(x) = f(x) + g(x),$$

apibrėžtą toje pat aibėje.
Naujosios funkcijos pokytis lygus

$$\Delta h(x) = \Delta f(x) + \Delta g(x).$$

Įsitikinkime, kad panaši lygybė teisinga ir išvestinėms.

TEOREMA

Tegu funkcijos $f(x), g(x)$ yra diferencijuojamos tame pačiame taške x, t. y. turi išvestines. Tada funkcija $h(x) = f(x) + g(x)$ taip pat diferencijuojama šiame taške ir

$$h'(x) = f'(x) + g'(x), \quad t.\,y. \quad \big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x).$$

Įrodymas. Kadangi $\Delta h(x) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$, tai

$$\frac{\Delta h(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x) + \Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}.$$

Remdamiesi ribų savybe, gauname:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x).$$

2 PAVYZDYS. Suskaičiuokime funkcijos $f(x) = x^2 + x$ išvestinę. Remdamiesi tuo, kad $(x^2)' = 2x$ ir $x' = 1$ bei įrodyta teorema, gauname: $(x^2+x)' = (x^2)'+x' = 2x+1$. Jau galime suskaičiuoti bet kokios kvadratiniu trinariu apibrėžiamos funkcijos išvestinę. Pavyzdžiui,

$$\big(3x^2 + 2x - 1\big)' = \big(3x^2\big)' + (2x)' + (-1)' = 3\big(x^2\big)' + 2x' + 0 = 6x + 2.$$

Užduotis. Parašykite funkcijos $y = 3x^2 + 2x - 1$ grafiko liestinės lygtį taške $x_0 = 0$.

Taigi funkcijų sumos išvestinė lygi išvestinių sumai. Nesunku įsitikinti, kad ir funkcijų skirtumo išvestinė lygi išvestinių skirtumui. Iš tikrųjų, taikydami įrodytas teoremas gauname:

$$\big(f(x) - g(x)\big)' = \big(f(x) + (-1)\cdot g(x)\big)' = f'(x) + \big((-1)\cdot g(x)\big)' = \\ = f'(x) - g'(x).$$

Skaičiuojant išvestinę, pastovų daugiklį galima iškelti prieš išvestinės ženklą:

$$\big(af(x)\big)' = af'(x).$$

Funkcijų sumos išvestinė lygi išvestinių sumai:

$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x).$$

Funkcijų skirtumo išvestinė lygi išvestinių skirtumui:

$$\big(f(x) - g(x)\big)' = f'(x) - g'(x).$$

1.8. Daugianario išvestinė

Išvestinės praverčia ieškant kreivių liestinių, tyrinėjant funkcijas, sprendžiant judėjimo ir kitokius uždavinius. Kad galėtume jas taikyti, turime apskaičiuoti pagrindinių funkcijų išvestines. Šiame skyrelyje surasime laipsninių funkcijų $f(x) = x^n$ su neneigiamais sveikaisiais rodikliais išvestines. Kai $n = 0$; 1; 2, išvestines jau apskaičiavome:

$$(x^0)' = 1' = 0, \quad (x^1)' = x' = 1, \quad (x^2)' = 2x.$$

Naudodamiesi išvestinių skaičiavimo taisyklėmis galime apskaičiuoti išvestinę bet kokios funkcijos, reiškiamos kvadratiniu trinariu. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\right)' &= \left(\frac{1}{2}x^2\right)' - (3x)' + 2' = \frac{1}{2} \cdot (x^2)' - 3 \cdot x' + 0 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 = x - 3.\end{aligned}$$

Apskaičiavę visų funkcijų $f(x) = x^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ išvestines, galėsime rasti bet kurio daugianario išvestinę.
Nagrinėkime atvejį, kai $n = 3$, t. y. skaičiuokime funkcijos $f(x) = x^3$ išvestinę. Skaičiuodami funkcijos pokytį, remsimės lygybe:

$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Perrašykime šią lygybę taip:

$$\begin{aligned}(x + \Delta x)^3 &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot (3x + \Delta x) = \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot p(x),\end{aligned} \tag{1}$$

čia pažymėjome $p(x) = 3x + \Delta x$.
Taigi

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= (x + \Delta x)^3 - x^3 = \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot p(x) - x^3 = \\ &= 3x^2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot p(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot p(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + \Delta x \cdot p(x)\right) = 3x^2.\end{aligned}$$

Čia pasinaudojome tuo, kad kai $\Delta x \to 0$, tai ir $\Delta x \cdot p(x) \to 0$.
Gavome:

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = x^4$ išvestinę. Skaičiuodami $(x + \Delta x)^4$ remkimės (1) lygybe:

$$(x + \Delta x)^4 = (x + \Delta x)^3(x + \Delta x) = \big(x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot p(x)\big)(x + \Delta x) =$$
$$= x^4 + 4x^3 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot r(x), \tag{2}$$

čia $r(x) = \Delta x \cdot p(x) + 3x^2 + x \cdot p(x)$.
Taigi

$$\Delta f(x) = x^4 + 4x^3 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot r(x) - x^4 = 4x^3 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot r(x).$$

Toliau skaičiuodami panašiai kaip atveju $n = 3$, gauname:

$$\big(x^4\big)' = 4x^3.$$

1 užduotis. Remdamiesi (2) lygybe gaukite lygybę

$$(x + \Delta x)^5 = x^5 + 5x^4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot s(x)$$

ir įrodykite, kad

$$\big(x^5\big)' = 5x^4.$$

Visas gautąsias išvestines

$$\big(x^0\big)' = 0, \quad \big(x^1\big)' = 1, \quad \big(x^2\big)' = 2x, \quad \big(x^3\big)' = 3x^2, \quad \big(x^4\big)' = 4x^3, \quad \big(x^5\big)' = 5x^4$$

galima užrašyti taip:

$$\big(x^n\big)' = nx^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Samprotaudami panašiai, kaip ir nagrinėtais atvejais, galime šią lygybę įrodyti visoms n reikšmėms.

Visiems $n = 0, 1, 2, \ldots$ teisinga lygybė $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Dabar jau galime skaičiuoti išvestines funkcijų, apibrėžiamų bet kokiais daugianariais.

1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = 2x^7 - 3x^5 + x + 1$ išvestinę.
Remdamiesi išvestinių skaičiavimo taisyklėmis ir lygybe $(x^n)' = nx^{n-1}$, gauname:

$$f(x) = \big(2x^7\big)' - \big(3x^5\big)' + x' + 1' = 14x^6 - 15x^4 + 1.$$

2 užduotis. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = \frac{1}{9}x^{18} - \frac{1}{5}x^5 + 3x^2 - 13$ išvestinę.

Pratimai ir uždaviniai

46. Raskite funkcijos išvestinę:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 6$;
b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12$;
c) $f(x) = 4x^2 + 6x - 10$;
d) $f(x) = 5x^4 + 2x^2 + 5x$;
e) $f(x) = -x^3 - x^2 - x - 1$;
f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + x + 2$.

47. Raskite funkcijos išvestinę nurodytame taške:

a) $f'(0)$, kai $f(x) = 3x^2 - 5x + 10$;
b) $f'(2)$, kai $f(x) = 3x^3 - 6x$;
c) $f'(1)$, kai $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1$;
d) $f'(-1)$, kai $f(x) = 2x^6 + 6$.

48. Parašykite funkcijos grafiko liestinės, nubrėžtos per nurodytą tašką, lygtį. Nubraižykite funkcijos grafiką ir liestinę:

a) $y = x^2 - 2x$, $M(0; 0)$;
b) $y = 2x^2 - 4x + 2$, $M(0; 2)$;
c) $y = -x^2 - 2x + 3$, $M(0; 3)$;
d) $y = -3x^2 + 3$, $M(-1; 0)$;
e) $y = -x^3 + 1$, $M(0; 1)$;
f) $y = x^3 + 1$, $M(1; 2)$.

49. Raskite tašką, kuriame funkcijos grafiko liestinė lygiagreti abscisių ašiai:

a) $y = x^3 - 3x + 1$;
b) $y = x^3 - 3x^2 + x$;
c) $y = 3x^3 + 9x^2$;
d) $y = 2x^3 - 6x$.

50. Raskite funkcijos grafiko tašką, kuriame grafiko liestinė su abscisių ašimi sudaro nurodytą kampą. Nubraižykite funkcijos grafiką ir liestinę:

a) $y = -x^2 + 4x$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;
b) $y = 2x^2 + \sqrt{3}x$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

51. Duotos funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$. Kurios iš jų grafikas yra „statesnis“, kai $x = 1$:

a) $f(x) = x^3 + 10$, $g(x) = 2x^2 - 10$;
b) $f(x) = 3x^3 + 2x$, $g(x) = 5x^2 - 100x$;
c) $f(x) = 100x + 1$, $g(x) = 10x^{10} + 2$;
d) $f(x) = 5x^6 + 10x^5$, $g(x) = 6x^5 + 12x^4$;
e) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$;
f) $f(x) = 2x$, $g(x) = 5x$?

52. Sakome, kad kreivės kertasi stačiu kampu, jei yra statmenos jų liestinės, nubrėžtos per kirtimosi tašką. Įrodykite, kad funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai kertasi stačiu kampu, jei:

a) $f(x) = 3x^2 + 4x$, $g(x) = -\frac{1}{4}x$;

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x-1)^2$;

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}$.

Patarimas. Pasinaudokite tuo, kad dvi tiesės, kurių lygtys $y = k_1x+b_1$ ir $y = k_2x+b_2$, yra statmenos, kai $k_1 \cdot k_2 = -1$.

---

53. Stabdomas smagratis per t sekundžių pasisuka

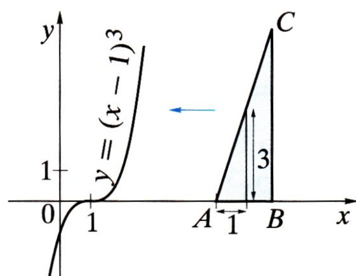
$\varphi(t) = a + bt - ct^2$

radianų kampu, čia a, b, c — teigiami skaičiai. Raskite stabdomo smagračio kampinį greitį. Per kiek laiko smagratis sustos?

54. Koordinačių plokštumoje „tvirtai įtvirtintas“ funkcijos

$y = (x-1)^3$

grafikas. Link jo iš dešinės ima slinkti didžiulis statusis trikampis ABC, kol atsirėmęs į funkcijos grafiką sustoja. Raskite, kokia bus trikampio viršūnės A koordinatė, kai trikampis sustos.



55. Apskaičiavę funkcijos

$f(x) = 3x^2 + x$

išvestinę, gauname:

$(3x^2 + x)' = 6x + 1$.

Apskaičiavę šios funkcijos išvestinę, gauname:

$(6x + 1)' = 6$.

Kadangi gavome funkciją, kuri įgyja vienintelę reikšmę, tai

$6' = 0$.

Kelis tokių skaičiavimų žingsnius reikėtų atlikti, kad gautume nulį, jei:

a) $f(x) = 6x^3 + 3x^2$;

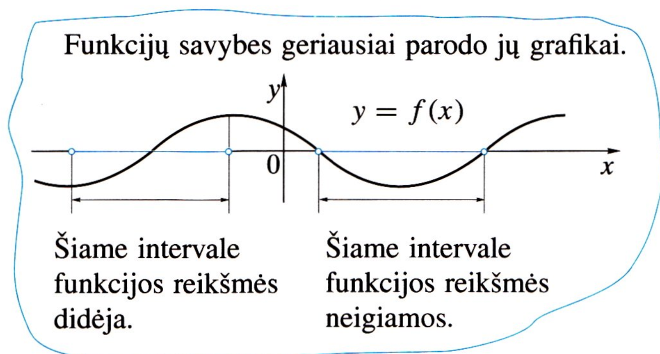
b) $f(x) = x^4 + x^3$;

c) $f(x) = (x^2 + 2x)^2$;

d) $f(x) = (2x^3 - 1)^3$?

2. Išvestinių taikymas funkcijoms tirti

Funkcijų savybes geriausiai parodo jų grafikai. Iš grafiko galime matyti, kur funkcijos reikšmės didėja, kur mažėja, su kokiomis kintamojo reikšmėmis jos reikšmės yra teigiamos, su kokiomis — neigiamos...



Žinome, kaip braižyti laipsninių, rodiklinių, logaritminių ir trigonometrinių funkcijų grafikus. Tačiau tai tik paprasčiausios funkcijos. Pasinaudoję jomis galime apibrėžti sudėtingesnes funkcijas. Pavyzdžiui, pasinaudoję funkcijomis

$$f(x) = x^2 \quad \text{ir} \quad g(x) = \sin x,$$

galime sudaryti naujas funkcijas:

$$h(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sin x,$$
$$k(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot \sin x,$$
$$l(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{\sin x}.$$

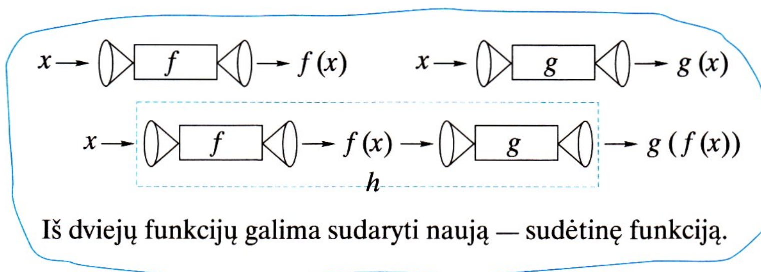
Iš dviejų funkcijų naują funkciją galima sudaryti visai kitaip.
Tegu $f(x)$ ir $g(x)$ yra dvi funkcijos. Pakeitę funkcijos $f(x)$ nepriklausomąjį kintamąjį funkcija $g(x)$, gausime naują funkciją $p(x) = f(g(x))$, o pakeitę funkcijos $g(x)$ nepriklausomąjį kintamąjį funkcija $f(x)$, gausime funkciją $t(x) = g(f(x))$. Pavyzdžiui, iš funkcijų $f(x) = x^2$ ir $g(x) = \sin x$ šiuo būdu galime sudaryti funkcijas

$$p(x) = f(\sin x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$$

ir

$$t(x) = g(x^2) = \sin(x^2).$$

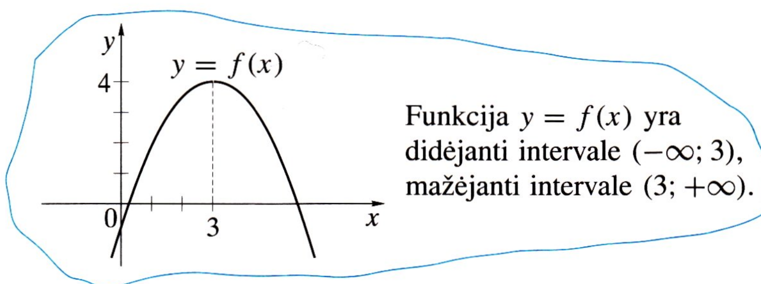
Taip apibrėžtos funkcijos vadinamos sudėtinėmis.



Taigi iš paprastų funkcijų galime sudaryti įvairias sudėtingesnes funkcijas. Kaip tyrinėti jų savybes? Kaip braižyti grafikus?
Geriausios pagalbininkės tiriant funkcijas yra jų išvestinės.

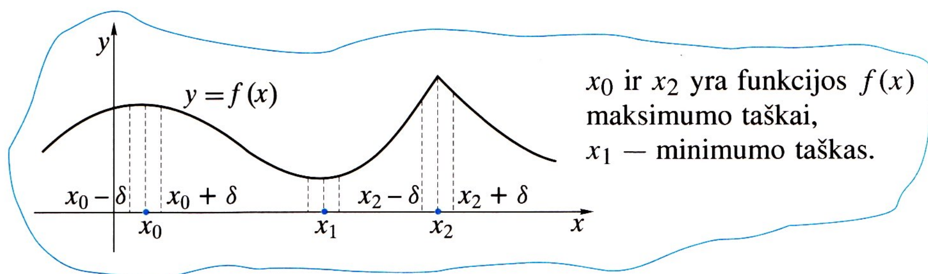
2.1. Funkcijų reikšmių didėjimas, mažėjimas ir ekstremumai

Funkcija $f(x)$ vadinama *didėjančia* intervale $(a; b)$, jeigu didesnę argumento reikšmę atitinka didesnė funkcijos reikšmė. Kitaip tariant, funkcija yra didėjanti intervale $(a; b)$, jeigu visiems $a < x_1 < x_2 < b$ yra teisinga nelygybė $f(x_1) < f(x_2)$.
Funkcija $f(x)$ vadinama *mažėjančia* intervale $(a; b)$, jeigu didesnę argumento reikšmę atitinka mažesnė funkcijos reikšmė, t. y. visiems $a < x_1 < x_2 < b$ yra teisinga nelygybė $f(x_1) > f(x_2)$.
Jeigu intervale $(a; b)$ funkcija yra didėjanti, tai intervalą $(a; b)$ vadiname jos didėjimo intervalu, jeigu mažėjanti — mažėjimo intervalu.
Funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus lengvai nustatome iš grafiko: didėjant argumento reikšmėms didėjančios funkcijos grafikas „kyla į viršų“, mažėjančios — „leidžiasi žemyn“.



APIBRĖŽIMAS
Sakoma, kad funkcija $f(x)$ *taške* x_0 *įgyja maksimumą, jeigu galima rasti tokį intervalą* $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$, *kad su visais* $x \neq x_0$, *priklausančiais šiam intervalui, teisinga nelygybė* $f(x_0) > f(x)$. *Taškas* x_0 *vadinamas funkcijos maksimumo tašku, o funkcijos reikšmė* $f(x_0)$ — *funkcijos maksimumu.*

Taigi funkcija taške x_0 įgyja maksimumą, jeigu yra toks intervalas (nors ir labai mažas), kuriam priklauso pats taškas x_0, kad šiame taške funkcijos reikšmė $f(x_0)$ yra didesnė už kitas šiame intervale įgyjamas funkcijos reikšmes $f(x)$.
Tolydžios funkcijos įgyja maksimumus jų reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalų sandūros taškuose. Funkcija maksimumo ir minimumo taškų gali turėti ne vieną.

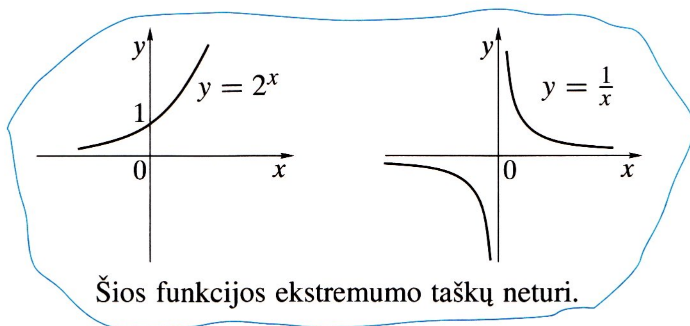


Panašiai apibrėžiami ir funkcijos minimumo taškai.

APIBRĖŽIMAS
Sakoma, kad funkcija $f(x)$ taške x_0 įgyja minimumą, jeigu galima rasti tokį intervalą $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, kad su visais $x \neq x_0$, priklausančiais šiam intervalui, teisinga nelygybė $f(x_0) < f(x)$. Taškas x_0 vadinamas funkcijos minimumo tašku, o funkcijos reikšmė $f(x_0)$ — funkcijos minimumu.

Funkcija gali neturėti nei maksimumo, nei minimumo taškų, gali turėti tik maksimumo ar tik minimumo taškus, tačiau taip pat gali turėti tiek maksimumo, tiek minimumo taškų. Maksimumo ir minimumo taškai vadinami funkcijos *ekstremumo taškais* (lotyniško žodžio *extremus* reikšmė — kraštutinis, galinis), o funkcijos reikšmės šiuose taškuose — funkcijos ekstremumais.

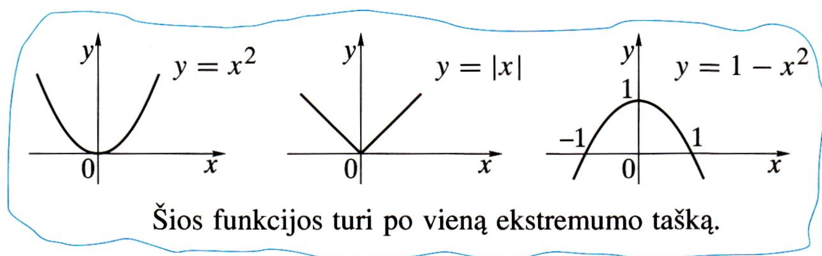
1 PAVYZDYS. Prisiminus, kaip atrodo funkcijų $f(x) = 2^x$, $f(x) = \frac{1}{x}$ grafikai, nesunku padaryti išvadą, kad šios funkcijos neturi ekstremumo taškų.



Šios funkcijos ekstremumo taškų neturi.

1 užduotis. Pateikite daugiau pavyzdžių funkcijų, neturinčių ekstremumo taškų.

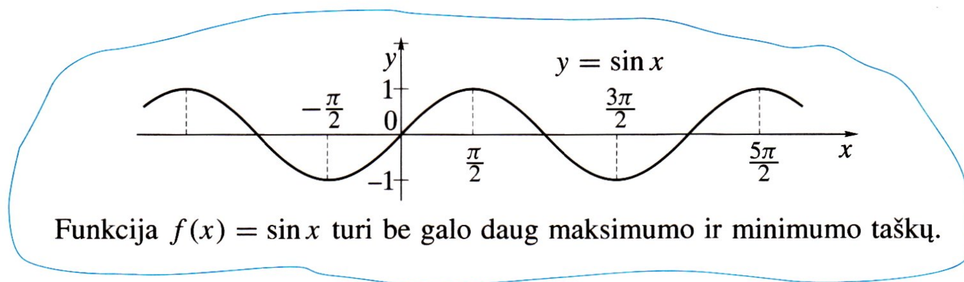
2 PAVYZDYS. Funkcija $f(x) = x^2$ turi vienintelį ekstremumo tašką; taškas $x_0 = 0$ yra šios funkcijos minimumo taškas. Šis taškas yra ir funkcijos $f(x) = |x|$ minimumo taškas. Funkcija $f(x) = 1-x^2$ taip pat turi vienintelį ekstremumo tašką; taškas $x_0 = 0$ yra jos maksimumo taškas.



Šios funkcijos turi po vieną ekstremumo tašką.

2 užduotis. Kokius ekstremumo taškus turi funkcija $f(x) = |1 - x^2|$?

3 PAVYZDYS. Funkcija $f(x) = \sin x$ turi be galo daug maksimumo ir be galo daug minimumo taškų. Taškuose $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \boldsymbol{Z})$ funkcija įgyja maksimumus $f(x_k) = 1$, o taškuose $x_l = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ $(l \in \boldsymbol{Z})$ — minimumus $f(x_l) = -1$.



Funkcija $f(x) = \sin x$ turi be galo daug maksimumo ir minimumo taškų.

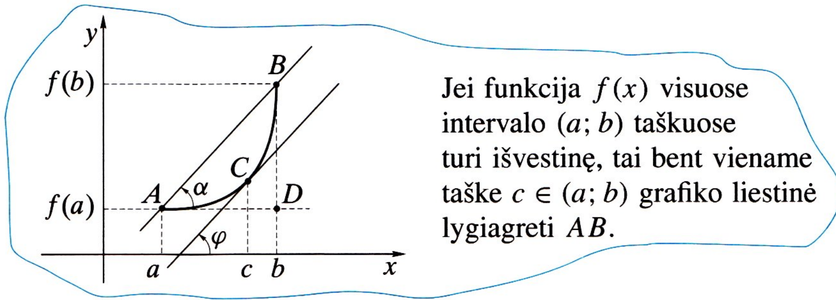
3 užduotis. Suraskite visus funkcijos $g(x) = |\sin x|$ maksimumo ir minimumo taškus.

2.2. Lagranžo teorema

Žinodami, kad automobilis per tris valandas nuvažiavo 210 kilometrų, galime apskaičiuoti vidutinį jo greitį: $v_{\text{vid}} = \frac{210}{3} = 70\,(\text{km/h})$. Ar galima teigti, kad nors akimirką automobilis važiavo šiuo greičiu, jeigu jo greitis nuolat keitėsi?

Sugrįšime prie šio klausimo kiek vėliau, o dabar truputį pabraižykime. Intervale $[a; b]$ nubrėžkime kokios nors tolydžios ir turinčios išvestinę visuose intervalo $(a; b)$ taškuose funkcijos grafiką. Taškus $A(a; f(a))$ ir $B(b; f(b))$ sujunkime tiese. Ar galima nubrėžti tiesę, kuri būtų lygiagreti tiesei AB ir liestų funkcijos grafiką?

Pažiūrėję į brėžinį tikriausiai nuspręsime, kad galima. Tegu ši tiesė liečia grafiką taške, kurio abscisė $x = c$.



Kadangi nubrėžtoji tiesė yra lygiagreti tiesei AB, tai kampai α ir φ yra lygūs. Tada lygūs ir jų tangentai: $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi$. Tačiau $\operatorname{tg}\varphi$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške $x = c$ krypties koeficientas, todėl $\operatorname{tg}\varphi = f'(c)$. Skaičius $\operatorname{tg}\alpha$ yra funkcijos $f(x)$ pokyčio ir argumento pokyčio santykis:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

taigi

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Šį teiginį griežtai įrodė prancūzų matematikas Ž. L. Lagranžas.

LAGRANŽO TEOREMA

Jeigu funkcija yra tolydi intervale $[a; b]$ *ir visuose taškuose* $x \in (a; b)$ *turi išvestinę, tai yra toks taškas* $c \in (a; b)$, *kad*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

O dabar susiekime Lagranžo teoremą su kūnų judėjimu. Jei $f(x)$ reiškia materialaus taško nueitą kelią per laiką x, tai santykis

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

reiškia vidutinį taško greitį laikotarpiu nuo a iki b, o $f'(c)$ — momentinį jo greitį laiko momentu c. Taigi Lagranžo teorema teigia, kad nors vieną akimirką judančio taško momentinis greitis buvo lygus vidutiniam greičiui.

Užduotis. Taškas c, su kuriuo teisinga Lagranžo teoremos lygybė, yra nebūtinai vienintelis. Nubrėžkite grafiką funkcijos, kuriai Lagranžo teoremos lygybė būtų teisinga su dviem skirtingomis c reikšmėmis.

Pratimai ir uždaviniai

56. Funkcija $f(x)$ apibrėžta intervale $[a; b]$. Raskite tašką c, kuriame

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Nubraižykite brėžinį:

a) $f(x) = x^2,\ x \in [0; 4]$;

b) $f(x) = x^2,\ x \in [-1; 1]$;

c) $f(x) = x^3,\ x \in [0; 2]$;

d) $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

57. Materialiojo taško padėtį Oy ašyje nusako funkcija

$$y(t) = 32t - t^2$$

(atstumas matuojamas metrais, laikas — sekundėmis). Raskite vidutinį taško greitį laiko atkarpoje $[a; b]$ ir laiko momentą, kai momentinis greitis lygus vidutiniam:

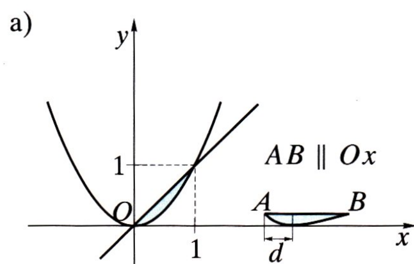
a) $a = 0,\ b = 10$; b) $a = 16,\ b = 32$; c) $a = 8,\ b = 24$.

Nurodymas. Momentinis taško greitis yra funkcijos $y(t)$ išvestinė, o vidutinis greitis — koordinatės $y(t)$ pokyčio ir laiko pokyčio santykis.

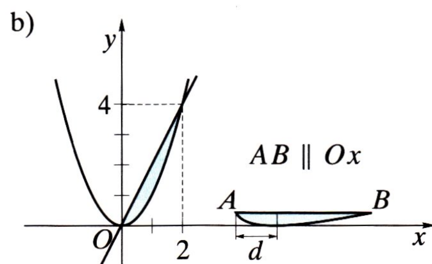
---

58. Įsivaizduokime, kad nusibraižę koordinačių plokštumoje parabolę $y = x^2$ ir tiesę, išpjovėme šiomis linijomis apribotą figūrą ir padėjome ant Ox ašies taip, kaip parodyta brėžinyje. Raskite brėžinyje pažymėtą atstumą d:

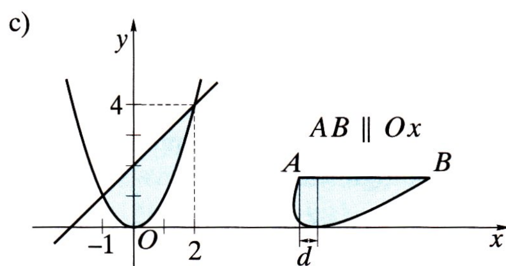
a)



b)



c)



2.3. Funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo požymiai

Šiame skyrelyje sužinosime, kaip remiantis funkcijos išvestine galima nustatyti, kur funkcijos reikšmės didėja, kur mažėja.

TEOREMA
Jei funkcija $f(x)$ intervale $(a; b)$ turi išvestinę ir išvestinė yra teigiama, tai šiame intervale funkcija yra didėjanti.

Įrodymas. Pasirinkime du intervalo $(a; b)$ taškus $x_1 < x_2$ ir nagrinėkime funkciją intervale $[x_1; x_2]$. Pritaikę Lagranžo teoremą gauname, kad yra toks taškas $c \in (x_1; x_2)$, kad

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Tačiau išvestinė yra teigiama, t. y. $f'(c) > 0$ ir $x_2 > x_1$, todėl $f(x_2) - f(x_1) > 0$, arba $f(x_2) > f(x_1)$. Taigi funkcija $f(x)$ intervale $(a; b)$ yra didėjanti.
Panašiai yra įrodoma ir teorema apie mažėjančias funkcijas.

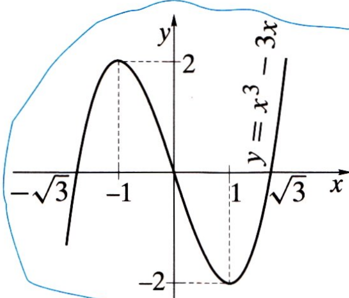
TEOREMA
Jei funkcija $f(x)$ intervale $(a; b)$ turi išvestinę ir išvestinė yra neigiama, tai šiame intervale funkcija yra mažėjanti.

1 užduotis. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{x^3}{3} + x$ išvestinę ir įrodykite, kad funkcija visoje realiųjų skaičių aibėje yra didėjanti.

1 PAVYZDYS. Raskime funkcijos $f(x) = x^3 - 3x$ reikšmių didėjimo intervalus. Apskaičiuojame funkcijos išvestinę: $f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Norėdami rasti, kur išvestinės reikšmės yra teigiamos, sprendžiame nelygybę:

$$3(x^2 - 1) > 0 \quad \text{arba} \quad (x - 1)(x + 1) > 0.$$

Šios nelygybės sprendinių aibę sudaro intervalai $(-\infty; -1)$ ir $(1; +\infty)$. Taigi šiuose intervaluose funkcija yra didėjanti. Suradę funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus, apskaičiavę kelias funkcijos reikšmes galime bent jau apytiksliai nubraižyti funkcijos grafiką.



Intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(1; +\infty)$ funkcija yra didėjanti, o jos išvestinė teigiama.
Intervale $(-1; 1)$ funkcija yra mažėjanti, o jos išvestinė neigiama.

2 PAVYZDYS. Raskime funkcijos

$$f(x) = 2x^4 - x^2$$

reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus.

Pirmiausia raskime išvestinę:

$$f'(x) = \left(2x^4 - x^2\right)' = 2 \cdot 4 \cdot x^3 - 2x = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1).$$

Matome, kad išvestinė lygi nuliui, kai

$$x = -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}.$$

Funkcijos reikšmių didėjimo intervalus rasime išsprendę nelygybę

$$2x(4x^2 - 1) > 0.$$

Šios nelygybės sprendinių aibę sudaro du intervalai:

$$\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \quad \text{ir} \quad \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

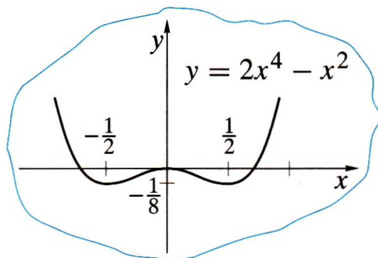
Šiuose intervaluose funkcija yra didėjanti. Taip pat yra du intervalai, kuriuose funkcija yra mažėjanti:

$$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \quad \text{ir} \quad \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Apskaičiavę funkcijos reikšmes

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}, \quad f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

ir pažymėję atitinkamus grafiko taškus, galime apytiksliai nubraižyti funkcijos grafiką.



2 užduotis. Raskite taškus, kuriuose funkcijos $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ grafikas kerta Ox ašį. Remdamiesi išvestinėmis raskite intervalus, kuriuose funkcija yra didėjanti arba mažėjanti. Apytiksliai nubraižykite funkcijos grafiką.

Pratimai ir uždaviniai

59. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra didėjanti intervale $I = (0; +\infty)$, o funkcija $g(x)$ — mažėjanti tame intervale:

a) $f(x) = x^2 - 1$; b) $f(x) = \sqrt{x}$;

c) $g(x) = 2 - x^3$; d) $g(x) = \frac{3}{x}$.

60. Raskite intervalus, kuriuose funkcija yra didėjanti arba mažėjanti, nubraižykite grafiką:

a) $f(x) = x^2 - 7x + 12$; b) $f(x) = x^2 + x - 1$;

c) $f(x) = 2x^2 - 4x$; d) $f(x) = 3x - 1$.

61. Raskite intervalus, kuriuose funkcija yra didėjanti arba mažėjanti:

a) $f(x) = x^3 + 4x$; b) $f(x) = x^3 - 6x$;

c) $f(x) = 4x^4 - 10$; d) $f(x) = x^4 + 4x^2$;

e) $f(x) = x^2(x - 3)$; f) $f(x) = x(x - 1)^2$.

62. Raskite intervalus, kuriuose funkcija yra didėjanti arba mažėjanti, ir nubraižykite grafiką:

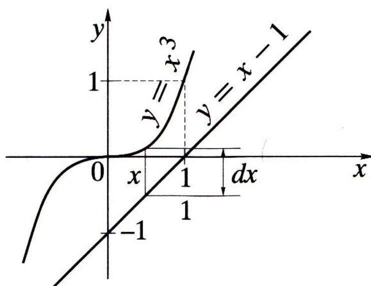
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ -x^2 - 1, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ -x^2 + 1, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{kai } x \leqslant 2, \\ x^2 - 5x + 6, & \text{kai } x > 2; \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{kai } x \leqslant 3, \\ -x^2 + 7x - 12, & \text{kai } x > 3. \end{cases}$

63. Koordinačių plokštumoje nubrėžti funkcijų $f(x) = x^3$ ir $g(x) = x - 1$ grafikai. Neneigiamiems x apibrėžkime funkciją $d(x)$, kuri lygi atstumui tarp grafikų taškų $(x; f(x))$ ir $(x; g(x))$. Raskite funkcijos $d(x)$ $(x \geqslant 0)$ didėjimo ir mažėjimo intervalus.

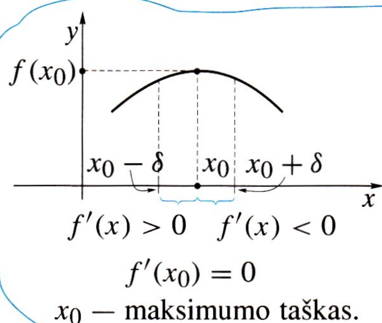


2.4. Funkcijos ekstremumai: kaip jų ieškoti?

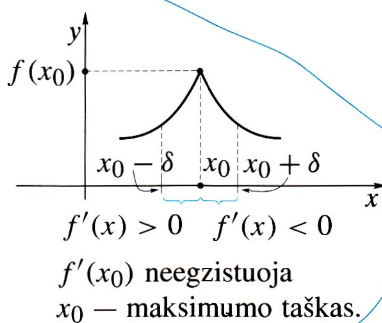
Jau žinome: kai funkcijos išvestinė yra teigiama, tai funkcija yra didėjanti, kai neigiama — mažėjanti. Ištirsime, kaip funkcijos reikšmės kinta ties tais taškais, kuriuose išvestinė lygi nuliui arba iš viso neegzistuoja. Tokie taškai vadinami *kritiniais*.
Tegu x_0 yra funkcijos kritinis taškas. Taigi $f'(x_0) = 0$ arba išvestinė neegzistuoja. Tarkime, galima nurodyti tokį skaičių $\delta > 0$, kad:

$$f'(x) > 0, \quad \text{kai} \quad x \in (x_0 - \delta;\, x_0),$$
$$f'(x) < 0, \quad \text{kai} \quad x \in (x_0;\, x_0 + \delta).$$

Tada intervale $(x_0 - \delta;\, x_0)$ funkcija yra didėjanti, o intervale $(x_0;\, x_0 + \delta)$ — mažėjanti. Vadinasi, funkcijos reikšmė $f(x_0)$ yra didesnė už kitas reikšmes $f(x)$, kurias funkcija įgyja intervale $(x_0 - \delta;\, x_0 + \delta)$, kai $x \neq x_0$. Todėl taškas x_0 yra funkcijos maksimumo taškas.



$f'(x_0) = 0$
x_0 — maksimumo taškas.

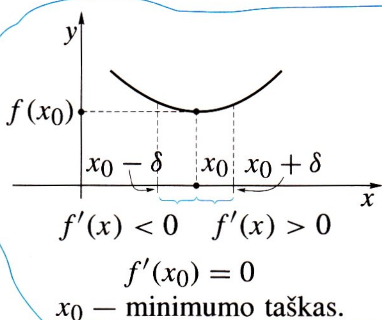


$f'(x_0)$ neegzistuoja
x_0 — maksimumo taškas.

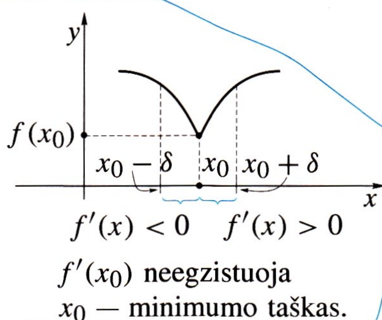
Jeigu galima nurodyti tokį skaičių $\delta > 0$, kad:

$$f'(x) < 0, \quad \text{kai} \quad x \in (x_0 - \delta;\, x_0),$$
$$f'(x) > 0, \quad \text{kai} \quad x \in (x_0;\, x_0 + \delta),$$

tai intervale $(x_0 - \delta;\, x_0)$ funkcija mažėjanti, o intervale $(x_0;\, x_0 + \delta)$ — didėjanti. Tada funkcijos reikšmė $f(x_0)$ yra mažesnė už kitas reikšmes $f(x)$, kurias funkcija įgyja intervale $(x_0 - \delta;\, x_0 + \delta)$, kai $x \neq x_0$. Todėl taškas x_0 yra funkcijos minimumo taškas.

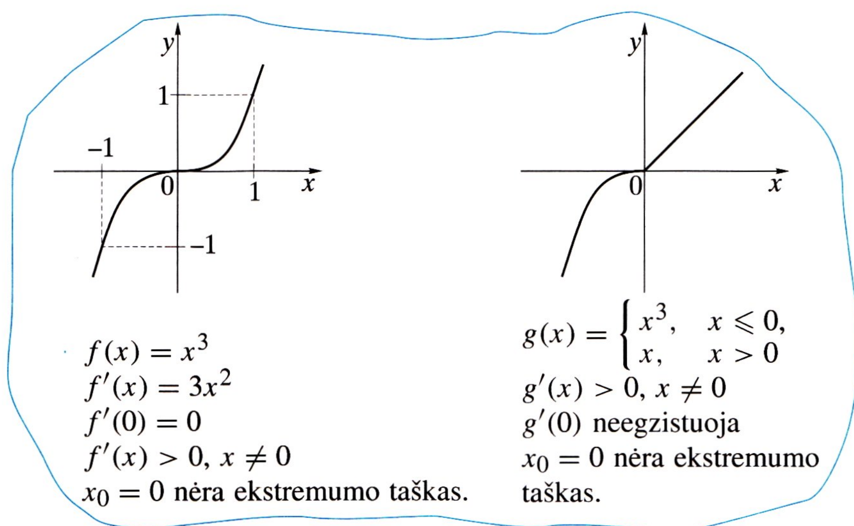


$f'(x_0) = 0$
x_0 — minimumo taškas.



$f'(x_0)$ neegzistuoja
x_0 — minimumo taškas.

Tačiau kartais funkcijos išvestinės reikšmės abipus kritinio taško gali būti to paties ženklo (teigiamos arba neigiamos). Tada kritinis taškas nebus funkcijos ekstremumo taškas.



Jeigu funkcijos $f(x)$ išvestinės $f'(x)$ reikšmės keičia ženklą, kai x didėdamas praeina kritinį tašką x_0, tai funkcija šiame taške turi ekstremumą.
Taškas x_0 yra maksimumo taškas, jeigu praeinant x_0 išvestinės $f'(x)$ reikšmių ženklas keičiasi iš pliuso į minusą. Taškas x_0 yra minimumo taškas, jeigu praeinant x_0 išvestinės $f'(x)$ reikšmių ženklas keičiasi iš minuso į pliusą. Jei praeinant x_0 išvestinės reikšmių ženklas nesikeičia, tai taškas nėra ekstremumo taškas.

Taigi ieškoti funkcijos $f(x)$ ekstremumų galime taip: randame kritinius taškus ir kiekvienam jų tyrinėjame, kaip keičiasi išvestinės $f'(x)$ reikšmių ženklas, kai x didėdamas praeina tą kritinį tašką. Jeigu išvestinės reikšmių ženklas keičiasi — kritinis taškas yra ekstremumo taškas, jei nesikeičia — nėra.
Tačiau ar šitaip elgdamiesi niekada nepražiopsome ekstremumo taškų? Ar negali atsitikti taip, kad ekstremumo taškas x_0 nėra kritinis taškas, t. y.

$$f'(x_0) \text{ egzistuoja,}$$

tačiau

$$f'(x_0) \neq 0?$$

Kad taip negali būti, teigia teorema, kurią įrodė prancūzų matematikas P. Ferma.

FERMA TEOREMA
Jeigu funkcija $f(x)$ ekstremumo taške x_0 turi išvestinę, tai ši išvestinė lygi nuliui: $f'(x_0) = 0$.

1 PAVYZDYS. Raskime intervalus, kuriuose funkcija

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

yra didėjanti arba mažėjanti bei funkcijos ekstremumus.
Ši funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje. Randame jos išvestinę:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2\right)' = 3x^2 - 3 \cdot 2x = 3x(x - 2).$$

Taigi išvestinė egzistuoja visuose taškuose; kai $x = 0, x = 2$ ji lygi nuliui. Šie taškai yra funkcijos kritiniai taškai. Kritinių taškų tyrimui patogu naudoti tokią lentelę:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
f'	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
f	$\nearrow$	$f(0) = 0$, max	$\searrow$	$f(2) = -4$, min	$\nearrow$

Lentelėje funkcijos reikšmių didėjimą pažymėjome rodykle $\nearrow$, mažėjimą — $\searrow$. Taigi intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(2; +\infty)$ funkcija didėjanti, o intervale $(0; 2)$ — mažėjanti. Taške $x = 0$ funkcija įgyja maksimumą $f(0) = 0$, o taške $x = 2$ — minimumą $f(2) = -4$.

2 PAVYZDYS. Raskime funkcijos

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus ir ekstremumus.
Ši funkcija apibrėžta ir diferencijuojama visoje realiųjų skaičių aibėje:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Matome, kad

$$f'(x_0) = 0, \quad \text{kai} \quad x_0 = -1,$$

o kituose taškuose išvestinės reikšmės teigiamos. Taigi, kai x pereina vienintelį kritinį tašką $x_0 = -1$, funkcijos išvestinės reikšmės nekeičia ženklo. Funkcija yra didėjanti ir ekstremumų neturi.

Užduotis. Raskite funkcijos $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ reikšmių didėjimo bei mažėjimo intervalus ir ekstremumus.

Pratimai ir uždaviniai

64. Raskite funkcijos kritinius taškus. Nustatykite, kurie iš jų yra maksimumo ir kurie — minimumo taškai:

a) $f(x) = x^2 - 8x$;
b) $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$;
c) $f(x) = 2x^2 - x^4$;
d) $f(x) = 3x^4 - x^3$.

65. Raskite intervalus, kuriuose funkcijos reikšmės didėja, kuriuose mažėja, bei funkcijos ekstremumus ir nubraižykite grafiką:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x$;
b) $f(x) = x^2 - 3x + 1$;
c) $f(x) = x^2 + 4x - 4$;
d) $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

66. Raskite intervalus, kuriuose funkcijos reikšmės didėja, kuriuose mažėja, bei funkcijos ekstremumus:

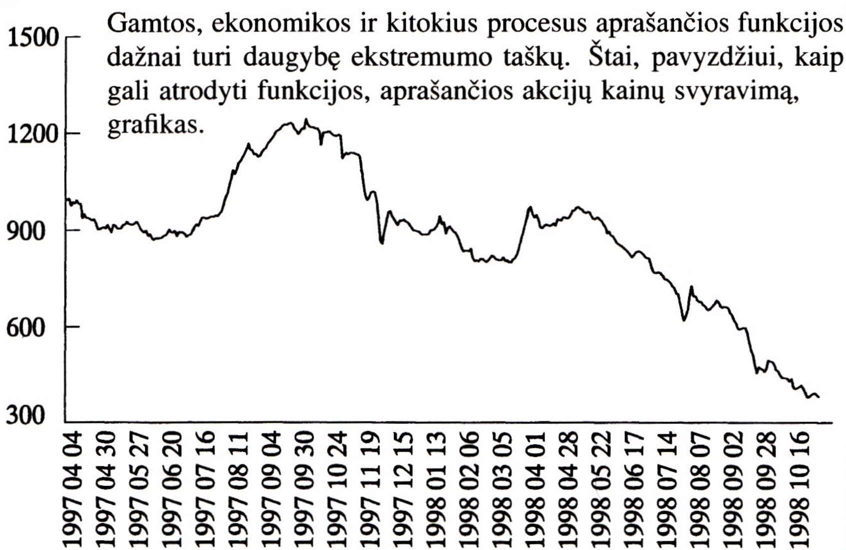
a) $f(x) = x^3 + x^2$;
b) $f(x) = x^3 + 3x$;
c) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x$;
d) $f(x) = x^3 - 6x^2$.

67. Raskite intervalus, kuriuose funkcijos reikšmės didėja, kuriuose mažėja, bei funkcijos ekstremumus. Nubraižykite grafiką:

a) $f(x) = |x - 1|(x + 2)$;

b) $f(x) = x^2 + |2x - 1|$.

68. Nubrėžtos dvi funkcijos $f(x) = 8x - x^2 - 10$ grafiko liestinės: viena — taške $x_0 = 3$, antroji — funkcijos maksimumo taške. Raskite plotą trikampio, kurį riboja šios liestinės ir ordinačių ašis.



Gamtos, ekonomikos ir kitokius procesus aprašančios funkcijos dažnai turi daugybę ekstremumo taškų. Štai, pavyzdžiui, kaip gali atrodyti funkcijos, aprašančios akcijų kainų svyravimą, grafikas.

Indeksas „Litin", rodantis akcijų kainų svyravimą Lietuvos rinkoje.

3. Funkcijų išvestinių skaičiavimo taisyklės

Remdamiesi apibrėžimu apskaičiavome keleto paprastų funkcijų išvestines. Pavyzdžiui,

$$(x^4)' = 4x^3, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Naudodamiesi išvestinių skaičiavimo taisyklėmis galime apskaičiuoti kai kurių sudėtingesnių funkcijų išvestines. Pavyzdžiui,

$$\left(\frac{1}{4}x^4 + 3x^2\right)' = \left(\frac{1}{4}x^4\right)' + \left(3x^2\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x = x^3 + 6x.$$

Tačiau, jeigu tektų skaičiuoti, pavyzdžiui, išvestines funkcijų

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}, \quad g(x) = (2x-1)^4, \quad h(x) = x^3\sqrt{x},$$

vėl tektų skaičiuoti ribas. O jas skaičiuoti nėra paprasta.
Šiame skyriuje įrodysime kelis teiginius, kuriais remiantis dažnai galima surasti funkcijos išvestinę nesinaudojant ribomis.

3.1. Funkcijų sandaugos ir dalmens išvestinės

Tegu $f(x)$, $g(x)$ yra dvi funkcijos su ta pačia apibrėžimo sritimi. Sudėję, sudauginę arba padaliję šių funkcijų reikšmes gauname naujas funkcijas

$$f(x) + g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Pirmosios dvi funkcijos apibrėžtos toje pat aibėje kaip ir $f(x)$ bei $g(x)$, o trečioji — tiems x, kuriems $g(x) \neq 0$.
Jeigu funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ turi išvestines, tai funkcijų suma irgi diferencijuojama ir

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x).$$

Apskaičiuosime funkcijų sandaugos ir dalmens išvestines.

TEOREMA
Jeigu funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra diferencijuojamos, tai ir jų sandauga $f(x) \cdot g(x)$ yra diferencijuojama, o šios funkcijos išvestinė apskaičiuojama taip:

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Funkcija $\frac{f(x)}{g(x)}$, kai $g(x) \neq 0$, irgi yra diferencijuojama ir

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Įrodymas. Įrodysime tik pirmą lygybę. Pritaikę išvestinės apibrėžimą, gauname:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}.$$

Pertvarkysime trupmenos skaitiklį taip, kad reiškinyje atsirastų funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmių pokyčiai:

$$f(x+\Delta x) = f(x+\Delta x) - f(x) + f(x);$$
$$f(x+\Delta x) = \Delta f(x) + f(x),$$

čia $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$;

$$f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) = \Delta f(x)\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot g(x+\Delta x);$$

$$\begin{aligned} &f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x) = \\ &\quad = \Delta f(x)\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot\big(g(x+\Delta x) - g(x)\big) = \\ &\quad = \Delta f(x)\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot \Delta g(x), \end{aligned}$$

čia $\Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x)$.
Taigi

$$\begin{aligned} \big(f(x)\cdot g(x)\big)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right). \end{aligned}$$

Taikydami funkcijų sandaugos ribos skaičiavimo taisyklę, gausime:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) = f'(x)\cdot g(x);$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right) = f(x)\cdot g'(x).$$

Taigi

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Pirmąją teoremos lygybę įrodėme.

1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = (3x^5 + x)(x - 2\sqrt{x})$ išvestinę. Taikydami funkcijų sandaugos išvestinės skaičiavimo taisyklę, gauname:

$$f'(x) = \left(3x^5 + x\right)'\left(x - 2\sqrt{x}\right) + \left(3x^5 + x\right)\left(x - 2\sqrt{x}\right)'.$$

Kadangi

$$\left(3x^5 + x\right)' = \left(3x^5\right)' + x' = 15x^4 + 1, \quad \left(x - 2\sqrt{x}\right)' = x' - \left(2\sqrt{x}\right)' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}},$$

tai

$$f'(x) = \left(15x^4 + 1\right)\left(x - 2\sqrt{x}\right) + \left(3x^5 + x\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$$
$$= 18x^5 - 33x^4\sqrt{x} + 2x - 3\sqrt{x}.$$

1 užduotis. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = (x\sqrt{x} + 1)(x^2 + x)$ išvestinę.

2 PAVYZDYS. Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ išvestinę. Taikydami funkcijų dalmens išvestinės skaičiavimo taisyklę, gauname:

$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{2(x-1) - (2x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

2 užduotis. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ išvestinę.

Naudodamiesi funkcijų dalmens išvestinės skaičiavimo taisykle, galime rasti išvestines laipsninių funkcijų su sveikaisiais neigiamais rodikliais. Tegu n — natūralusis skaičius. Tada

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{x^n \cdot 1' - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)\cdot\frac{1}{x^{n+1}} =$$
$$= (-n)x^{-n-1}.$$

Matome, kad lygybė

$$\left(x^m\right)' = mx^{m-1}$$

teisinga tiek su teigiamais, tiek su neigiamais sveikaisiais m.

Pratimai ir uždaviniai

69. Raskite funkcijos išvestinę dviem būdais:
1) sudauginę daugianarius ir tada diferencijuodami;
2) taikydami funkcijų sandaugos išvestinės skaičiavimo taisyklę:
a) $f(x) = (x^3 + 2x)(x^2 + 3x + 1)$;
b) $f(x) = (x^4 + x^3)(x^3 + x^2 + 1)$;
c) $f(x) = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$;
d) $f(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

70. Įsitikinkite, kad teisinga lygybė:

a) $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$; b) $\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;
c) $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$; d) $\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$.

Patarimas. Užrašykime, pvz., $x^{\frac{3}{2}} = x \cdot \sqrt{x}$ ir pasinaudokime jau žinoma formule $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

---

71. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:
a) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}(x^2 + 2x)$; b) $f(x) = \left(2x^{\frac{3}{2}} + x^3\right)\left(x^2 - 2x^{\frac{5}{2}}\right)$.

72. Raskite funkcijos $g(x)$ išvestinę:

a) $g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$; b) $g(x) = \frac{1}{x(x+1)}$; c) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$;
d) $g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x-1}$; e) $g(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}$; f) $g(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

73. Apskaičiuokite $h'(0)$, jei:

a) $h(x) = (x^{50} - 1)(x^{100} + 1)$; b) $h(x) = \frac{x}{x^{10}+2}$;
c) $h(x) = x^{\frac{5}{2}}(x^3 + 1)$; d) $h(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

74. Parašykite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygtį taške x_0. Nubraižykite brėžinį:

a) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = -1$; b) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x_0 = 1$;
c) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x_0 = 0$; d) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $x_0 = 4$.

75. Įrodykite, kad jeigu funkcijos $f(x)$, $g(x)$ ir $h(x)$ diferencijuojamos, tai jų sandauga diferencijuojama ir
$\big(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$.
Pasinaudodami šia formule, raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$; b) $f(x) = (2x + 1)(3x + 2)(4x + 3)$;
c) $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$; d) $f(x) = x^2(x^2 + x)(x^3 + x^2)$.

3.2. Sudėtinės funkcijos išvestinė

Apskaičiavome laipsninės funkcijos $f(x) = x^n$, kai n sveikasis skaičius, išvestinę, taip pat dar kelių paprastų funkcijų išvestines. Naudodamiesi funkcijų sumos, sandaugos ir dalmens diferencijavimo taisyklėmis, galime apskaičiuoti sudėtingesnių funkcijų išvestines. Pavyzdžiui,

$$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x^2}\right)' = \frac{(\sqrt{x}+1)'x^2 - (\sqrt{x}+1)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\frac{x^2}{2\sqrt{x}} - 2x(\sqrt{x}+1)}{x^4} = \frac{-3x^2 - 4x\sqrt{x}}{2x^4\sqrt{x}}.$$

Tačiau net tokios paprastos funkcijos, kaip $f(x) = \sqrt{2x+1}$, išvestinės skaičiavimo taisyklės dar neturime. Šiame skyrelyje išmoksime diferencijuoti tokias funkcijas. Pastebėkime, kad funkcija

$$f(x) = \sqrt{2x+1}$$

gali būti išreikšta pasinaudojant kitomis dviem funkcijomis: funkcija

$$g(x) = 2x+1 \quad \text{ir} \quad h(x) = \sqrt{x}.$$

Iš tikrųjų, pakeitę funkcijos $h(x) = \sqrt{x}$ kintamąjį į $g(x)$, gauname

$$h\big(g(x)\big) = \sqrt{2x+1}.$$

Taigi $f(x) = h(g(x))$. Todėl funkcija $f(x)$ yra sudėtinė. Funkcijas $g(x)$ ir $h(x)$ galima ir kitaip „sudėti“ ir gauti kitą sudėtinę funkciją: $g(h(x)) = 2\sqrt{x}+1$.
Funkcija $f(x) = \sin(x^2)$ taip pat yra sudėtinė; jei $g(x) = x^2, h(x) = \sin x$, tai $f(x) = h(g(x))$.
Kartais sudėtinę funkciją „skaidyti į sudedamąsias dalis“ patogu įvedant naują žymenį. Pavyzdžiui:
$f(x) = \sqrt{2x+1}$: $t = 2x+1$, $f(x) = \sqrt{t}$;
$f(x) = \sin(x^2)$: $t = x^2$, $f(x) = \sin t$.

1 užduotis. Iš kokių funkcijų yra sudarytos sudėtinės funkcijos
$f(x) = \operatorname{tg}(x^3), g(x) = (\operatorname{tg} x)^3, h(x) = \cos(\sin x)$?

Sudėtinės funkcijos $f(x) = h(g(x))$ apibrėžimo sritis gali nesutapti su funkcijos $g(x)$ apibrėžimo sritimi. Pavyzdžiui, jei $g(x) = \sin x, h(x) = \sqrt{x}$, tai sudėtinė funkcija $f(x) = h(g(x))$ apibrėžta su tomis x reikšmėmis, su kuriomis $g(x)$ įgyja neneigiamas reikšmes. Taigi funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis yra intervalų $[2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \boldsymbol{Z}$, sąjunga.
Apskaičiuosime sudėtinės funkcijos $f(x) = \sqrt{2x+1}$ išvestinę. Pritaikę apibrėžimą, gauname:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2(x+\Delta x)+1} - \sqrt{2x+1}}{\Delta x}.$$

Pažymėję $t = 2x+1$, gauname $\Delta t = 2(x+\Delta x)+1-(2x+1) = 2\Delta x$. Tada $2(x+\Delta x)+1 = 2x+1+2\Delta x = t+\Delta t$. Užrašykime ribą taip:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{t+\Delta t}-\sqrt{t}}{\Delta x}.$$

Padalykime ir padauginkime trupmeną iš Δt ir pasinaudokime ribų savybėmis:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sqrt{t+\Delta t}-\sqrt{t}}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{t+\Delta t}-\sqrt{t}}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Kai $\Delta x \to 0$, tai ir $\Delta t = 2\Delta x \to 0$, todėl

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{t+\Delta t}-\sqrt{t}}{\Delta t} = \left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}.$$

Antrąją ribą užrašykime taip:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x} = t' = (2x+1)' = 2.$$

Taigi

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)' = \left(\sqrt{t}\right)'\cdot(2x+1)' = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$$

Matome, kad sudėtinės funkcijos $f(x) = \sqrt{2x+1}$ išvestinė lygi funkcijų, iš kurių ji „sudėta“, išvestinių atitinkamuose taškuose sandaugai. Ši taisyklė teisinga ir bendruoju atveju.

TEOREMA

Jei funkcija $g(x)$ diferencijuojama taške x_0, o funkcija $f(x)$ — taške $t = g(x_0)$, tai funkcija $h(x) = f(g(x))$ diferencijuojama taške x_0 ir

$$h'(x_0) = f'(t)\cdot g'(x_0), \quad t = g(x_0).$$

PAVYZDYS. Apskaičiuokime funkcijos $h(x) = (x^3+2x^2)^4$ išvestinę.

Ši funkcija yra sudėtinė: jei $g(x) = x^3+2x^2$, $f(x) = x^4$, tai $h(x) = f(g(x))$. Jeigu pažymėsime $t = x^3+2x^2$, tai $h(x) = t^4$. Naudodamiesi sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisykle, gauname:

$$h'(x) = \left(t^4\right)'\cdot t' = 4t^3\cdot\left(x^3+2x^2\right)' = 4\left(x^3+2x^2\right)^3\left(3x^2+4x\right).$$

2 užduotis. Apskaičiuokite funkcijos $h(x) = \sqrt{2x^2+x}$ išvestinę.

Pratimai ir uždaviniai

76. Raskite sudėtines funkcijas $f(g(x))$ ir $g(f(x))$, kai:

a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$; b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$;
c) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^2$; d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x + 1$.

77. Raskite $f(f(x))$, kai $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Kokioje aibėje apibrėžta gautoji funkcija?

78. Raskite $f(2x+1)$, jei:

a) $f(x) = 3x + 2$; b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$;
c) $f(x) = x^3 - 2x^2$; d) $f(x) = \sqrt{2x-2}$.

79. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę dviem būdais:
1) pakėlę dvinarį laipsniu, po to diferencijuodami;
2) diferencijuodami kaip sudėtinę funkciją:

a) $f(x) = (3x-2)^3$; b) $f(x) = (2x-1)^3$;
c) $f(x) = (x+2)^4$; d) $f(x) = (2x^2+1)^4$.

80. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = (2x+3)^{10}$; b) $f(x) = (x^2 - 2x)^8$;
c) $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^6$; d) $f(x) = (x^4 - 1)^5$.

81. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = \sqrt{3x+2}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;
c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$; d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2+3}}$.

82. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$; b) $f(x) = x^2\sqrt{2x+1}$;
c) $f(x) = \frac{\sqrt{3x-2}}{x}$; d) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x+\sqrt{x}}{2x-x^2}$.

83. Tarkime, $f(x)$ — visoje realiųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$ diferencijuojama funkcija. Raskite $y'(x)$, jei:

a) $y(x) = f(x^3)$; b) $y(x) = f(\sqrt{x})$;
c) $y(x) = \sqrt{f(x)}$; d) $y(x) = f^3(x)$.

Pavyzdys. Raskime $y'(x)$, kai $y(x) = f(x^4 + x)$.
Pažymėję $t = x^4 + x$, galime užrašyti $y(x) = f(t)$.
Taigi $y'(x) = f'(t) \cdot t' = f'(x^4 + x) \cdot (x^4 + x)' = (3x^3 + 1) \cdot f'(x^4 + x)$.

---

4. Trigonometrinių funkcijų išvestinės

Jau žinome, kad laipsninių funkcijų su sveikaisiais laipsnių rodikliais išvestinės skaičiuojamos taip:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in \boldsymbol{Z}).$$

Šiame skyriuje išmoksime skaičiuoti kitų svarbių funkcijų — sinuso, kosinuso, tangento ir kotangento funkcijų išvestines.
Užrašykime funkcijos $f(x) = \sin x$ išvestinę taške $x_0 = 0$ pagal apibrėžimą:

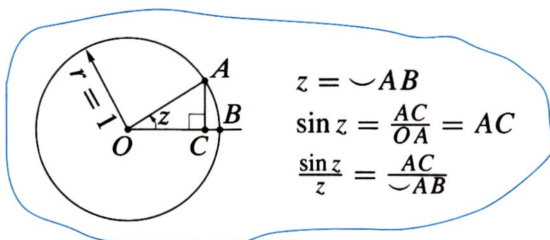
$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(0 + \Delta x) - \sin 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Taigi norėdami surasti šią išvestinę, turime suskaičiuoti ribą

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \quad \text{arba} \quad \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}.$$

4.1. Riba $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}$

Funkcija $g(z) = \frac{\sin z}{z}$ apibrėžta su visais $z \neq 0$ ir yra lyginė, t. y. $g(-z) = g(z)$.
Taigi pakanka nustatyti, prie kokio skaičiaus artėja funkcijos $g(z) = \frac{\sin z}{z}$ reikšmės, kai z įgyja vis mažesnes teigiamas reikšmes.
Pasitelkime geometrinį brėžinį: nubrėžkime vienetinį apskritimą, pažymėkime jo centrą O ir nubrėžkime centrinį z radianų kampą $\angle AOB$. Iš taško A į spindulį OB nuleiskime statmenį AC.



Tada

$$z = \frac{\smile AB}{OA} = \smile AB, \quad \sin z = \frac{AC}{OA} = AC.$$

Taigi

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{AC}{\smile AB}.$$

Įsižiūrėkime į brėžinį. Kuo z reikšmė mažesnė, tuo mažiau skiriasi lanko AB ir atkarpos AC ilgiai. Galime padaryti prielaidą, kad

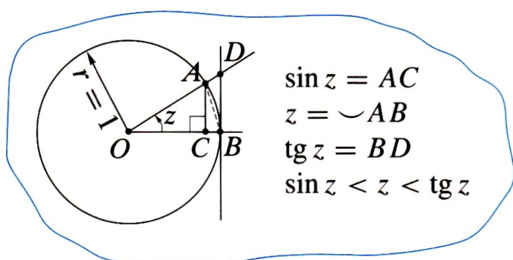
$$\frac{AC}{\smile AB} \to 1, \quad \text{t. y.} \quad \frac{\sin z}{z} \to 1, \quad \text{kai } z \to 0.$$

Taigi

$$\boxed{\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1}$$

Jeigu norite patys įsitikinti, kad ši lygybė yra teisinga, panagrinėkite griežtą jos įrodymą.

Papildykime nagrinėtą brėžinį, nubrėžę taške B apskritimo liestinę ir pažymėję jos ir spindulio tęsinio susikirtimo tašką D.



Pažiūrėjus į brėžinį, galima spėti, kad

$$\sin z < z < \operatorname{tg} z.$$

Tai galime griežtai įrodyti. Trikampio OAB plotas mažesnis už išpjovos OAB plotą, o išpjovos plotas mažesnis už trikampio OBD plotą:

$$S_{\triangle OAB} < S_{OAB} < S_{\triangle OBD}.$$

Įstatę į šią nelygybę reiškinius

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OB = \frac{1}{2} \sin z, \qquad S_{OAB} = \frac{1}{2} z,$$
$$S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} \operatorname{tg} z,$$

gauname:

$$\frac{1}{2} \sin z < \frac{1}{2} z < \frac{1}{2} \operatorname{tg} z.$$

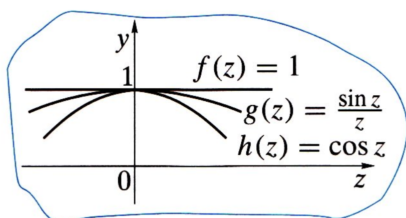
Taigi nelygybė $\sin z < z < \operatorname{tg} z$ teisinga. Iš jos gauname:

$$\frac{1}{\sin z} > \frac{1}{z} > \frac{1}{\operatorname{tg} z} \quad \text{arba} \quad \frac{\cos z}{\sin z} < \frac{1}{z} < \frac{1}{\sin z}.$$

Padauginę šią nelygybę iš $\sin z$, gauname:

$$\cos z < \frac{\sin z}{z} < 1.$$

Vadinasi, funkcijos $g(z) = \frac{\sin z}{z}$, kai $|z| < \frac{\pi}{2}$, grafikas yra įsiterpęs tarp funkcijų $f(z) = 1$ ir $h(z) = \cos z$ grafikų.



Tačiau $\lim\limits_{z\to 0} \cos z = 1$, todėl

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Apskaičiuotoji riba labai praverčia skaičiuojant kitas ribas.

PAVYZDŽIAI. Apskaičiuokime ribas: a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$.

a) Šią ribą apskaičiuosime pasinaudoję tuo, kad pastovų skaičių galima iškelti prieš ribos ženklą:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$$

b) Jeigu $y = 2x$ ir $x \to 0$, tai ir $y \to 0$. Taigi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

c) Šio pavyzdžio riba panaši į b) pavyzdžio ribą, tačiau reiškiniai trupmenos vardiklyje ir po sinuso ženklu skiriasi daugikliu. Nesunku juos suvienodinti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x}\right) = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 2.$$

Pasinaudoję riba $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$ galime apskaičiuoti funkcijos $f(x) = \sin x$ išvestinę taške $x_0 = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(0+\Delta x) - \sin 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Užduotis. Parašykite sinusoidės liestinės taške $x = 0$ lygtį. Kokį kampą ji sudaro su Ox ašimi?

Pratimai ir uždaviniai

84. Apskaičiuokite ribą:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x\cdot\cos 2x)$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin^2 x + \cos\frac{x}{2}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos 2x}{3-\sqrt{3}\sin x}$.

85. Apskaičiuokite ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$;

f) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

Pasigyrimas. Mokame apskaičiuoti, pavyzdžiui, ribas $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$. Vadinasi, ir ribas $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 3x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x} : \frac{\sin 3x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ taip pat mokame apskaičiuoti!

86. Apskaičiuokite ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x\cdot\cos x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{x\sin x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x\cdot\operatorname{ctg} 2x)$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{ctg}^2 3x)x^2$.

Pavyzdys. Apskaičiuokime ribą $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\operatorname{tg} 5x}$.

Užrašykime reiškinį taip:

$\frac{\sin^2 x}{x\operatorname{tg} 5x} = \frac{\sin^2 x\cdot\cos 5x}{x\sin 5x} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\sin 5x}\cdot\cos x.$

Apskaičiavę daugiklių ribas gausime:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\operatorname{tg} 5x} = 1\cdot\frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{1}{5}.$

4.2. Sinuso, kosinuso, tangento ir kotangento funkcijų išvestinės

Apskaičiuosime paprasčiausių trigonometrinių funkcijų išvestines. Pradėsime nuo sinuso ir kosinuso.
Įsitikinsime, kad šių funkcijų išvestinės yra tokios:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x}$$

Ieškodami išvestinių naudosimės apibrėžimu:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Pritaikę šį apibrėžimą funkcijai $f(x) = \sin x$, gauname:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Po ribos ženklu parašytos trupmenos skaitiklis ir vardiklis artėja prie nulio, kai $\Delta x \to 0$.
Taigi apskaičiuoti ribą įstatę $\Delta x = 0$ negalime.
Pakeiskime skaitiklyje sinusų skirtumą sandauga:

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Taigi

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Abi dešinės pusės ribas galime apskaičiuoti. Tegu $y = \frac{\Delta x}{2}$; kai $\Delta x \to 0$, tai ir $y \to 0$.
Taigi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Tegu $z = x + \frac{\Delta x}{2}$; kai $\Delta x \to 0$, tai $z \to x$. Pasinaudoję tuo, kad kosinusas yra tolydi funkcija, gauname:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \lim_{z \to x} \cos z = \cos x.$$

Taigi $(\sin x)' = \cos x$.

1 užduotis. Naudodamiesi sinuso funkcijos išvestinės skaičiavimo pavyzdžiu, įrodykite, kad $(\cos x)' = -\sin x$.

PAVYZDŽIAI. Apskaičiuokime funkcijų išvestines:
a) $f(x) = \sin(2x+1)$; b) $f(x) = \cos(x^2)$; c) $f(x) = \sin^2 x$.

a) Funkcija

$$f(x) = \sin(2x+1)$$

yra sudėtinė: jei $g(x) = \sin x$, $h(x) = 2x+1$, tai $f(x) = g(h(x))$. Pažymėję $t = 2x+1$, išvestinę skaičiuojame pagal sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklę:

$$f'(x) = (\sin t)' \cdot t' = \cos t \cdot (2x+1)' = 2\cos(2x+1).$$

b) Pažymėkime $t = x^2$, tada $f(x) = \cos t$,

$$f'(x) = (\cos t)' \cdot t' = -\sin t \cdot \left(x^2\right)' = -2x\sin(x^2).$$

c) Pažymėję $t = \sin x$, gauname $f(x) = t^2$ ir

$$f'(x) = \left(t^2\right)' \cdot t' = 2t \cdot (\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin(2x).$$

Skaičiuodami tangento ir kotangento funkcijų išvestines, naudosimės formulėmis

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ir funkcijų dalmens išvestinės skaičiavimo taisykle.
Įsitikinsime, kad

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Iš tikrųjų:

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

2 užduotis. Įrodykite, kad

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Pratimai ir uždaviniai

87. Raskite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške x_0 lygtį, nubraižykite funkcijos grafiką ir grafiko liestinę nurodytame taške:

a) $f(x) = 2\sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$; b) $f(x) = 1 + 2\cos x,\ x_0 = \pi$;
c) $f(x) = \sin(2x) - 1,\ x_0 = 0$; d) $f(x) = \sin x - \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

88. Kokiu kampu funkcijos $g(x)$ grafikas kerta abscisių ašį:

a) $g(x) = \operatorname{tg} x$; b) $g(x) = \operatorname{ctg} x$;
c) $g(x) = \operatorname{tg}^2 x$; d) $g(x) = \operatorname{ctg}^2 x$?

Nurodymas. Kampas, kuriuo grafikas kerta Ox ašį, lygus kampui, kurį grafiko liestinė kirtimosi taške sudaro su Ox ašimi.

---

89. Pertvarkę reiškinį, kuriuo apibrėžta funkcija, raskite jos išvestinę:

a) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x}$; b) $f(x) = \frac{1-\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin x}$;
c) $f(x) = \frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\cdot\cos x}{1+\sin x}$; d) $f(x) = \frac{3\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\sin^2(\pi+x)}{\cos x}$.

90. Pertvarkę reiškinį, kuriuo apibrėžta funkcija, raskite jos išvestinę:

a) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}$; b) $f(x) = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg} x}$;
c) $f(x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x$; d) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2-4}$.

91. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra didėjanti visoje jos apibrėžimo srityje:

a) $f(x) = 2x + \sin x$; b) $f(x) = 3x - 2\cos x$;
c) $f(x) = 5x - \sin x + 2\cos x$; d) $f(x) = x + \sin x$.

92. Raskite funkcijos $f(x)$ kritinius taškus:

a) $f(x) = 2\sin x + x$; b) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x$;
c) $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$; d) $f(x) = \operatorname{ctg} x + \frac{4}{3}x$.

93. Raskite funkcijos $g(x)$ išvestinę:

a) $g(x) = x^2 \sin x$; b) $g(x) = x^3 \cos x$;
c) $g(x) = \frac{\sin x}{x}$; d) $g(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$.

94. Raskite funkcijos $h(x)$ išvestinę:

a) $h(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$; b) $h(x) = \cos^2 \frac{1}{x}$;
c) $h(x) = \sin^2 \sqrt{x}$; d) $h(x) = \cos^2 \sqrt{x}$.

95. Raskite $f'(x_0)$, kai:
a) $f(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}x^2 + \sin 3$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
b) $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)\cos x - 1$, $x_0 = 0$;
c) $f(x) = 2\sin(2x) + 3\cos x + \frac{\pi}{2}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;
d) $f(x) = 3x^4 - \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$, $x_0 = 0$;
e) $f(x) = \cos(\pi + x) - \operatorname{tg}(\pi - x)$, $x_0 = \pi$;
f) $f(x) = \sin 3 - x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

96. Kuriuose taškuose funkcijos $f(x) = \cos x$ liestinės lygiagrečios tiesei:
a) $y = -x$; b) $y = \frac{1}{2}x + 1$?

97. Raskite taškus, kuriuose funkcijos $f(x) = \sin x$ liestinės yra statmenos tiesei:
a) $y = x$; b) $y = \sqrt{2}x - 1$; c) $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$; d) $x = 0$.

98. Raskite x reikšmes iš intervalo $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, su kuriomis teisinga lygybė
$\cos^2 x - 2f'(x) = \sin x \cdot f'(x)$, kai $f(x) = \cos x$.

99. Raskite visas x reikšmes, su kuriomis funkcijos
$f(x) = 3 - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$
išvestinė lygi $2\sqrt{2}$.

100. Apskaičiavę laipsninės funkcijos su natūraliuoju rodikliu išvestinę, galime skaičiuoti šios išvestinės išvestinę ir t. t. Galų gale gausime nulį. Pavyzdžiui:

$$\left(x^3\right)' = 3x^2, \quad \left(3x^2\right)' = 6x, \quad (6x)' = 6, \quad 6' = 0.$$

O jeigu šitaip skaičiuotume, pavyzdžiui, su sinuso funkcija? Pabandykime:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$
$$(-\sin x)' = -\cos x, \quad (-\cos x)' = \sin x.$$

Sugrįžome į pradžią!
Įsitikinkite, kad su kosinuso funkcija taip pat „užkliuvę už varčios“ vėl pradėtume nuo pradžios.

5. Rodiklinės, logaritminės ir laipsninės funkcijų išvestinės

5.1. Skaičius e

Panagrinėkime seką

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Kai $n \to \infty$, šios sekos nariai mažėja. Jos nariai artėja prie 1, t. y.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Sekos

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

nariai taip pat mažėja, be to,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

Apskritai, jeigu m yra natūralusis skaičius, tai sekos nariai

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^m, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^m, \ldots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m, \ldots$$

taip pat mažėja, o jos riba lygi 1. Kiekvienas šios sekos narys yra to paties skaičiaus vienodų daugiklių sandauga. O jeigu didėjant n ir daugiklių skaičių didintume? Panagrinėkime seką, kurios n-tasis narys yra n vienodų narių sandauga:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right), \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right), \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right), \ldots, \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n}, \ldots$$

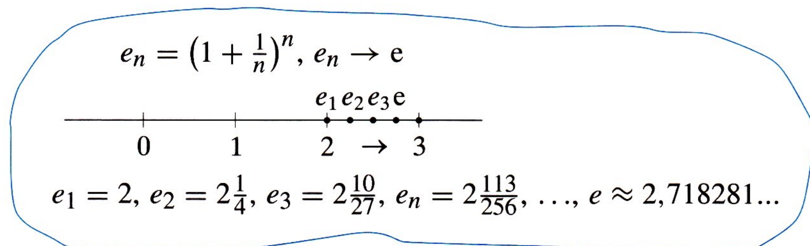
Bendrasis šios sekos narys reiškiamas formule

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pirmieji sekos nariai tokie: $e_1 = 2$, $e_2 = 2\frac{1}{4}$, $e_3 = 2\frac{10}{27}$. Taigi $e_1 < e_2$, $e_2 < e_3$. Pasinaudojus šiek tiek sudėtingesniais samprotavimais galima įrodyti, kad seka ir toliau didėja, (t. y. nelygybė $e_n < e_{n+1}$ teisinga su visais n), tačiau visi jos nariai lieka mažesni už 3.

Kai $n \to \infty$, sekos $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nariai artėja prie tam tikro skaičiaus, kurį žymėsime e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad 2 < \mathrm{e} < 3.$$



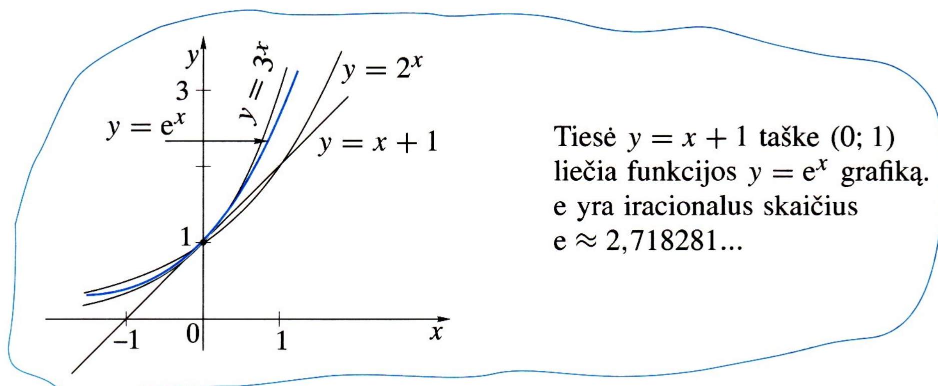
Šis skaičius yra iracionalusis, todėl negali būti užrašytas paprastąja trupmena:

$$\mathrm{e} \approx 2{,}718281\ldots$$

Skaičius e turi daug įdomių savybių. Panašiai kaip skaičius π jis pasirodo netikėčiausiose vietose. Štai vienas pavyzdys.

Kiekvienos rodiklinės funkcijos $f(x) = a^x$ grafikas eina per tašką (0; 1). Nubrėžkime per šį tašką tiesę, sudarančią su Ox ašimi 45° kampą, t. y. tiesę $y = x + 1$. Ar ši tiesė liečia kurios nors rodiklinės funkcijos $f(x) = a^x$ grafiką?

Jei $0 < a < 1$, tai tiesė kerta funkcijos grafiką, o ne liečia. Taigi nagrinėkime $a > 1$. Iš brėžinio matome, kad tiesė $y = x+1$ nėra funkcijos $y = 2^x$ grafiko liestinė; grafikas kyla į viršų nepakankamai „stačiai“. Pažiūrėkime į funkcijos $f(x) = 3^x$ grafiką. Jis yra perdaug „status“.



Taigi jeigu yra toks a, kad tiesė $y = 1 + x$ liečia funkcijos $f(x) = a^x$ grafiką, tai turi būti $2 < a < 3$.

Štai čia ir išnyra skaičius e:

Tiesė $y = x + 1$ yra funkcijos $f(x) = e^x$ liestinė taške $x = 0$.

Jeigu žinome funkcijos grafiko liestinės, nubrėžtos taške x_0, lygtį, tai žinome ir funkcijos išvestinės šiame taške reikšmę. Ji lygi tiesės krypties koeficientui. Taigi jei

$$f(x) = e^x, \quad \text{tai} \quad f'(0) = 1.$$

Tą pačią reikšmę gautume ir skaičiuodami išvestinę pagal apibrėžimą:

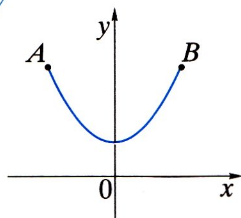
$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

Įsidėmėkime šią svarbią ribą, ja dar teks pasinaudoti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Matematikoje dažnai naudojamas logaritmas pagrindu e. Jis vadinamas natūraliuoju logaritmu ir žymimas $\ln x$. Taigi

$$\ln x = \log_e x.$$



Siūlas, kurio galai užrišti taškuose A, B, „nubrėžia“ funkcijos $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ grafiką.

Jeigu taškuose A ir B pririšime siūlo galus, Žemės traukos veikiamas siūlas nukars žemyn. Kokią kreivę pamatysime? Galilėjus manė, kad parabolę. Jis klydo. G. V. Leibnicas ir dar keli matematikai nustatė, kad įvedę koordinačių sistemą šią kreivę galime pavaizduoti funkcijos $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ grafiku ($a > 0$ — nuo siūlo ilgio priklausantis skaičius). Kodėl gamta taip mėgsta skaičių e?

5.2. Rodiklinės funkcijos išvestinė

Apskaičiuosime rodiklinių funkcijų

$$f(x) = a^x$$

išvestines. Jau žinome, kad funkcijos

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

išvestinė taške $x = 0$ lygi 1, taigi

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

Apskaičiuosime šios funkcijos išvestinę bet kokiame taške x. Pasinaudoję apibrėžimu, gauname:

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x} - \mathrm{e}^x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Kadangi daugiklis e^x nepriklauso nuo Δx, tai jį galime iškelti prieš ribos ženklą:

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^x.$$

Taigi

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,$$

t. y. funkcijos $f(x) = \mathrm{e}^x$ išvestinė lygi pačiai funkcijai:

$$\big(f(x)\big)' = f(x).$$

Užduotis. Įrodykite, kad šią savybę turi visos funkcijos

$$f(x) = c\mathrm{e}^x,$$

čia c yra skaičius.

Atskleidėme dar vieną skaičiaus e savybę: rodiklinė funkcija šiuo pagrindu visiškai „nebijo“ diferencijavimo veiksmo. Diferencijuok kiek tik nori — funkcija lieka ta pati!

Apskaičiuokime dabar bet kokios rodiklinės funkcijos

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

išvestinę.
Užrašę $a = \mathrm{e}^{\ln a}$, gausime:

$$f(x) = a^x = \mathrm{e}^{(\ln a)\cdot x}.$$

Taigi rodiklinę funkciją galime nagrinėti kaip sudėtinę funkciją, sudarytą iš funkcijų $g(x) = (\ln a) \cdot x$ ir $h(x) = \mathrm{e}^x$:

$$a^x = h\big(g(x)\big); \quad \text{arba} \quad a^x = \mathrm{e}^t, \quad t = \ln a \cdot x.$$

Remdamiesi sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisykle, gauname:

$$\big(a^x\big)' = \big(\mathrm{e}^t\big)' \cdot (\ln a \cdot x)' = \mathrm{e}^t \cdot \ln a = \ln a \cdot \mathrm{e}^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot a^x.$$

$$\boxed{\big(\mathrm{e}^x\big)' = \mathrm{e}^x; \quad \big(a^x\big)' = \ln a \cdot a^x \quad (a > 0, a \neq 1)}$$

PAVYZDŽIAI. Apskaičiuokime funkcijų $f(x) = \sin(x\,\mathrm{e}^x)$, $g(x) = a^{3x^2}$ išvestines.
Funkcija $f(x)$ yra sudėtinė, $f(x) = \sin t$, $t = x\mathrm{e}^x$. Taigi

$$\big(\sin(x\mathrm{e}^x)\big)' = (\sin t)' \cdot t' = \cos(x\mathrm{e}^x) \cdot (x\mathrm{e}^x)' = \cos(x\mathrm{e}^x) \cdot \big(x'\mathrm{e}^x + x(\mathrm{e}^x)'\big) =$$
$$= (\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) \cdot \cos(x\mathrm{e}^x).$$

Funkcija $g(x)$ taip pat yra sudėtinė: $g(x) = a^t$, $t = 3x^2$. Taigi

$$\big(a^{3x^2}\big)' = \big(a^t\big)' \cdot t' = \ln a \cdot a^t \cdot \big(3x^2\big)' = 6x \cdot \ln a \cdot a^{3x^2}.$$

Pratimai ir uždaviniai

101. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = \mathrm{e}^x + 3x$;
b) $f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - 3$;
c) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \sin(2x)$;
d) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{e}^3$.

102. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^x$;
b) $f(x) = \sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x$;
c) $f(x) = \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{e}^{3x}$;
d) $f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$.

103. Apskaičiuokite funkcijos $g(x)$ išvestinę:

a) $g(x) = 3^{3x}$;
b) $g(x) = 3^{x^2}$;
c) $g(x) = 3^{x \sin x}$;
d) $g(x) = 3^{\cos^2 x}$;
e) $g(x) = 2^{\sin x^2}$;
f) $g(x) = 10^{\sqrt{x^2-1}}$.

104. Duotos funkcijos:

$f(x) = x^3 + x - 1$ ir $g(x) = \frac{1}{\ln 4}\left(4^x - 10 \cdot 4^{\frac{x-1}{2}}\right) + 77x$.
Su kuriomis x reikšmėmis $f'(5) = g'(x)$?

105. Raskite visus funkcijos

$y(x) = \frac{4^x - 2^{x+1}}{\ln 4}$

grafiko taškus, kuriuose grafiko liestinė lygiagreti tiesei $y = 2x + 5$.

106. Įrodykite, kad funkcija $h(x)$ yra mažėjanti visoje jos apibrėžimo srityje:

a) $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - 5x$;
b) $h(x) = (\cos^2 x + 4)\mathrm{e}^{-2x}$.

107. Įrodykite, kad funkcija $h(x)$ yra didėjanti visoje jos apibrėžimo srityje:

a) $h(x) = 3x - \mathrm{e}^{-x}$;
b) $h(x) = (\sin x - 5)\mathrm{e}^{-3x}$.

108. Nustatykite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus, raskite ekstremumus:

a) $f(x) = 3 - x + \mathrm{e}^{x+2}$;
b) $f(x) = 2 + x + \mathrm{e}^{3-x}$;
c) $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-2x}$;
d) $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$;
e) $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$;
f) $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$.

Priminimas. Didėjimo intervalų ieškome spręsdami nelygybę $f'(x) > 0$, mažėjimo — nelygybę $f'(x) < 0$.

---

109. 20 °C temperatūroje vėstančios arbatos stiklinės temperatūrą apytiksliai aprašo funkcija

$y(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}$

(t — laikas, prabėgęs nuo stebėjimo pradžios, minutėmis, $y(t)$ — temperatūra Celsijaus laipsniais).

a) Raskite arbatos temperatūrą praėjus 10 min. nuo aušimo pradžios.
b) Kada arbatos temperatūra bus lygi 40 °C?
c) Koks arbatos aušimo greitis, kai $t = 20$?
d) Palyginkite aušimo greičius, kai $t = 20$ ir $t = 40$.

5.3. Logaritminės funkcijos išvestinė

Apskaičiuosime logaritminių funkcijų išvestines.
Užrašykime pagrindinę logaritmų tapatybę:

$$x = a^{\log_a x} \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1).$$

Kai $a = \mathrm{e}$, tai šią tapatybę galima užrašyti taip:

$$x = \mathrm{e}^{\ln x} \quad (x > 0).$$

Taigi teigiamiems x funkcija $f(x) = x$ gali būti užrašyta kaip sudėtinė funkcija:

$$f(x) = \mathrm{e}^t, \quad t = \ln x.$$

Kadangi $f(x) = x$, tai $f'(x) = 1$. Kita vertus, skaičiuodami pagal sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklę, gauname:

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^t\right)' \cdot t' = \mathrm{e}^t \cdot (\ln x)' = \mathrm{e}^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)'.$$

Šioje lygybėje $f'(x) = 1$, taigi

$$1 = x \cdot (\ln x)'.$$

Iš čia randame $(\ln x)'$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Apskaičiuokime bet kokios logaritminės funkcijos

$$f(x) = \log_a x$$

išvestinę. Pirmiausia pakeiskime logaritmo pagrindą:

$$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x.$$

Taigi

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Radome logaritminių funkcijų išvestines:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

PAVYZDŽIAI. Apskaičiuokime funkcijų $f(x) = \ln(2x+1)$, $g(x) = \ln^2 x$ išvestines. Funkcija $f(x)$ yra sudėtinė, taigi

$$f'(x) = \big(\ln(2x+1)\big)' = \frac{1}{2x+1} \cdot (2x+1)' = \frac{2}{2x+1}.$$

Funkcija $g(x)$ yra dviejų vienodų logaritminių funkcijų sandauga: $g(x) = \ln x \cdot \ln x$, taigi jos išvestinę galėtume skaičiuoti naudodamiesi funkcijų sandaugos diferencijavimo taisykle. Kita vertus, ją galime nagrinėti ir kaip sudėtinę: $g(x) = (\ln x)^2 = t^2$, $t = \ln x$. Taigi

$$\big(\ln^2 x\big)' = \big(t^2\big)' \cdot t' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}.$$

Pratimai ir uždaviniai

110. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = \ln(2x)$; b) $f(x) = \ln\left(3x^2\right)$;
c) $f(x) = \ln\left(xe^x\right)$; d) $f(x) = \ln\left(x^3 e^{\cos x}\right)$.

111. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = \ln(3x^2+2)$; b) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$;
c) $f(x) = \ln^3 x$; d) $f(x) = \ln^3 x^3$.

112. Apskaičiuokite funkcijos $g(x)$ išvestinę:

a) $g(x) = \frac{2\lg x}{\lg e} - \log_2 5$; b) $g(x) = \frac{\log_2 x}{x}$;
c) $g(x) = e^x \cdot \log_2 x$; d) $g(x) = \log_3 x \cdot \log_4 x$.

113. Apskaičiuokite $h'(x_0)$:
a) $h(x) = \ln(6x - x^2)$, $x_0 = 1$; b) $h(x) = \log_3(6 - 4x + x^2)$, $x_0 = 2$.

114. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus ir ekstremumus:

a) $f(x) = x - \ln x$; b) $f(x) = x^2 - 4x - 2\ln(x-2) + 7$;
c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; d) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$.

115. Kokia turi būti a reikšmė, kad funkcijos $g(x) = a\ln(3x-1)$ grafiko liestinė taške $x_0 = 2$ su Ox ašimi sudarytų 45° kampą?

116. Raskite x reikšmes, su kuriomis teisinga nelygybė $f'(x) > g'(x)$, kai:
a) $f(x) = \sin x + 3\ln(x-3) + 5$, $g(x) = \sin x - 0{,}5x^2$;
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3\ln(x-2) + \frac{1}{2}e^{2x}$, $g(x) = 6x + \frac{1}{2}e^{2x}$.

5.4. Laipsninės funkcijos išvestinė

Jau žinome, kad funkcijos $f(x) = x^n$ išvestinė, kai n yra sveikasis skaičius, skaičiuojama pagal formulę:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Teigiamų skaičių aibėje apibrėžtos visos laipsninės funkcijos $f(x) = x^r$, čia r — bet koks realusis skaičius. Apskaičiuosime jų išvestines. Pasinaudoję lygybe $x = \mathrm{e}^{\ln x}$, gauname:

$$f(x) = x^r = \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^r = \mathrm{e}^{r \ln x}, \quad \text{t. y.} \quad f(x) = \mathrm{e}^t, \quad t = r \ln x.$$

Todėl laipsninės funkcijos $f(x) = x^r$ išvestinę galime skaičiuoti pagal sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisyklę:

$$(x^r)' = (\mathrm{e}^t)' \cdot t' = \mathrm{e}^t \cdot (r \ln x)' = \frac{r}{x} \cdot \mathrm{e}^{r \ln x} = \frac{r}{x} \cdot x^r = rx^{r-1}.$$

Taigi visų laipsninių funkcijų $f(x) = x^r$ išvestinės skaičiuojamos pagal tą pačią formulę:

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}}$$

PAVYZDŽIAI. Apskaičiuokime funkcijų išvestines:
a) $f(x) = \sqrt{x}$; b) $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$; c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Šios funkcijos išvestinę jau esame apskaičiavę naudodamiesi apibrėžimu. Dabar tai galime padaryti greičiau:

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b) Kadangi, kai $x > 0$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, tai

$$g'(x) = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Ši lygybė teisinga ir kai $x < 0$.

c) Ši funkcija yra laipsninė: $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$. Taigi

$$h'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Pratimai ir uždaviniai

117. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = x^{\frac{5}{2}} + 3$;
b) $f(x) = x^{\frac{1}{4}} + 2x$;
c) $f(x) = \frac{2}{x^3}$;
d) $f(x) = \frac{1}{6x^5}$.

118. Raskite $f'(x_0)$, kai:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$;
b) $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$, $x_0 = 0$;
c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x_0 = 8$;
d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x+1}}$, $x_0 = 0$.

119. Ar teisinga lygybė $f'(0) = f(0)$, kai:

a) $f(x) = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}$;
b) $f(x) = 5\sqrt[5]{x+1} - 4$?

120. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x}$;
b) $f(x) = 0{,}8\sqrt[4]{x} - \frac{10}{3}x^3 + \frac{1}{5x^2}$;
c) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}\right)^3$;
d) $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$;
e) $f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 2\right)$;
f) $f(x) = \sqrt[4]{3 + 2x^2}$.

Pagrindinių funkcijų išvestinės

$(x^r)' = rx^{r-1}$, $r \in \boldsymbol{R}$.
$(\sin x)' = \cos x$.
$(\cos x)' = -\sin x$.
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

6. Funkcijų išvestinių taikymai

6.1. Funkcijų tyrimas

Kaip dažniausiai braižydavome funkcijų grafikus?

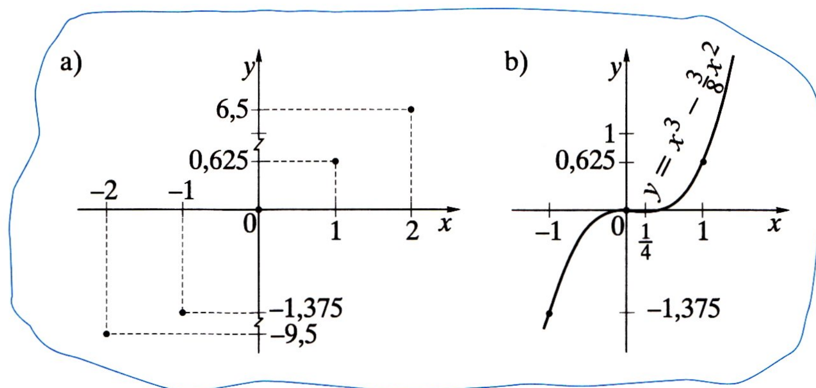
Norėdami nubraižyti funkcijos $f(x)$ grafiką, pasirinkdavome kelias kintamojo x reikšmes, apskaičiuodavome funkcijos reikšmes tuose taškuose, atidėdavome atitinkamus grafiko taškus ir sujungdavome kreive. Tačiau šitaip braižant galima apsirikti. Panagrinėkime, pavyzdžiui, funkciją

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{8}x^2.$$

Įstatę

$$x = -2, \quad x = -1, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$$

ir apskaičiavę funkcijos reikšmes, gauname penkis grafiko taškus, žr. a) brėžinį.



Jeigu sujungtume taškus kreive, panašia į funkcijos $g(x) = x^3$ grafiką ir tartume, kad tai yra funkcijos $f(x) = x^3 - \frac{3}{8}x^2$ grafikas — suklystume. Šios funkcijos grafikas atrodo taip, kaip parodyta b) brėžinyje.

Kad nepadarytume klaidos, prieš braižant funkcijos grafiką pravartu funkciją ištirti, t. y. nustatyti jos savybes, o braižant šiomis savybėmis pasinaudoti. Pavyzdžiui, jeigu nustatėme, kad funkcija yra lyginė (arba nelyginė), tai pakanka nubraižyti grafiką, kai nepriklausomasis kintamasis įgyja neneigiamas reikšmes ir pavaizduoti nubrėžtąją kreivę simetriškai Oy ašies (koordinačių pradžios taško) atžvilgiu. Jeigu funkcija periodinė su periodu T ($T > 0$), tai pakanka nubraižyti grafiką intervale $[0; T]$ ir nubrėžtąją kreivę „atkartoti“ visuose intervaluose $[mT; (m+1)T]$. Braižant funkcijos grafiką, svarbu žinoti, kur yra jos reikšmių didėjimo bei mažėjimo intervalai, minimumo ir maksimumo taškai ir t. t.

Tirti funkcijos savybes patogu tokia tvarka:

1) **Nustatome funkcijos apibrėžimo sritį.**
2) **Išsiaiškiname, ar funkcija yra lyginė, ar nelyginė, ar ji yra periodinė.**
3) **Randame taškus, kuriuose funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis (tokių taškų gali ir nebūti).**
4) **Nustatome funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus, ekstremumus.**
5) **Tiriame funkcijos elgesį, nepriklausomajam kintamajam neaprėžtai didėjant arba mažėjant.**

Pasinaudodami nustatytomis funkcijos savybėmis braižome jos grafiką. Panagrinėsime pavyzdžių.

1 PAVYZDYS. Ištirkime funkciją

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

ir nubraižykime jos grafiką.
1) Funkcija yra apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje.
2) Kadangi

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} = f(x),$$

tai funkcija yra lyginė.
3) Koordinačių ašis funkcijos grafikas kerta vieninteliame taške $O(0; 0)$.
4) Skaičiuojame funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (1+x^2) - x^2 \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

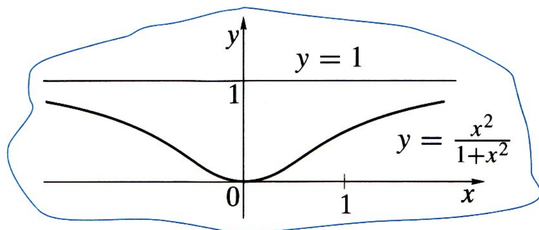
Matome, kad $f'(x) = 0$ tik tada, kai $x = 0$. Kai $x < 0$, tai $f'(x) < 0$, vadinasi, $(-\infty; 0)$ yra funkcijos reikšmių mažėjimo intervalas; kai $x > 0$, tai $f'(x) > 0$, todėl $(0; +\infty)$ yra funkcijos reikšmių didėjimo intervalas.
Patogu šio tyrimo rezultatus surašyti į lentelę:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
f'	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
f	$\searrow$	0, min	$\nearrow$

5) Patyrinėkime, kaip funkcija elgiasi, kai x neaprėžtai didėja, t. y. įgyja vis didesnes reikšmes (simboliškai rašome $x \to +\infty$). Perrašykime funkciją taip:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Kai x neaprėžtai didėja, tai $\frac{1}{1+x^2}$ artėja prie nulio, o pačios funkcijos reikšmės artėja prie 1. Simboliškai rašome: kai $x \to +\infty$, tai $f(x) \to 1$. Iš tų pačių lygybių matome, kad kai x mažėja įgydamas vis mažesnes neigiamas reikšmes, funkcijos reikšmės taip pat artėja prie 1: kai $x \to -\infty$, tai $f(x) \to 1$.
Dabar jau galime nubraižyti funkcijos grafiką:



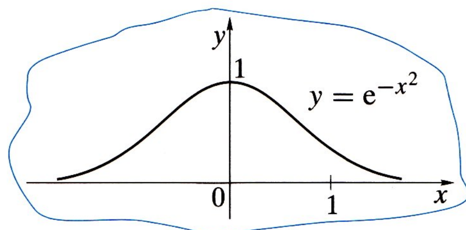
2 PAVYZDYS. Ištirkime funkciją $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ ir nubraižykime jos grafiką.
1) Funkcija yra apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje.
2) $f(-x) = \mathrm{e}^{-(-x)^2} = \mathrm{e}^{-x^2} = f(x)$, funkcija yra lyginė.
3) Kai $x = 0$, tai $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$. Taigi funkcijos grafikas kerta Oy ašį taške $(0; 1)$.
Lygtis $\mathrm{e}^{-x^2} = 0$ sprendinių neturi, todėl funkcijos grafikas nekerta Ox ašies.
4) Skaičiuojame funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \left(-x^2\right)' = -2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Matome, kad $f'(x) = 0$ tik tada, kai $-2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, t. y. kai $x = 0$.
Kadangi $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$ visiems x, tai $f'(x) > 0$, kai $-2x > 0$, $x < 0$. Taigi $(-\infty; 0)$ yra funkcijos reikšmių didėjimo intervalas. Analogiškai gauname, kad $(0; +\infty)$ yra funkcijos reikšmių mažėjimo intervalas.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
f'	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$
f	↗	1, max	↘

5) Panagrinėkime funkcijos elgesį, kai $x \to +\infty$. Kadangi $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}}$ ir didėjant x reiškinio e^{x^2} reikšmės neaprėžtai didėja, tai $\frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}} \to 0$. Taigi $f(x) \to 0$. Analogiškai įsitikiname, kad kai $x \to -\infty$, tai $f(x) \to 0$.
Dabar jau galime nubraižyti funkcijos grafiką.



Pratimai ir uždaviniai

121. Ištirkite funkciją $p(x)$ ir nubraižykite jos grafiką:

a) $p(x) = x^3 + x$; b) $p(x) = x^3 - 2x$;
c) $p(x) = x^3 - 3x$; d) $p(x) = x^3 - 3x^2$;
e) $p(x) = x^2(x^2 - 4)$; f) $p(x) = x(x - 1)^3$.

122. Ištirkite racionaliąją funkciją $f(x)$ ir nubraižykite jos grafiką:

a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$; b) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$;
c) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$; d) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$;
e) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

123. Ištirkite funkciją $g(x)$ ir nubraižykite jos grafiką:

a) $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$; b) $g(x) = (x - 1)\sqrt{x}$;
c) $g(x) = x\sqrt{1 - x}$; d) $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$;
e) $g(x) = x\sqrt{2 - x^2}$; f) $g(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$.

124. Ištirkite funkciją $f(x)$ ir nubraižykite jos grafiką:

a) $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$; b) $f(x) = \mathrm{e}^x - x$;
c) $f(x) = x\mathrm{e}^x$; d) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

125. Ištirkite funkciją $g(x)$ ir nubraižykite jos grafiką:

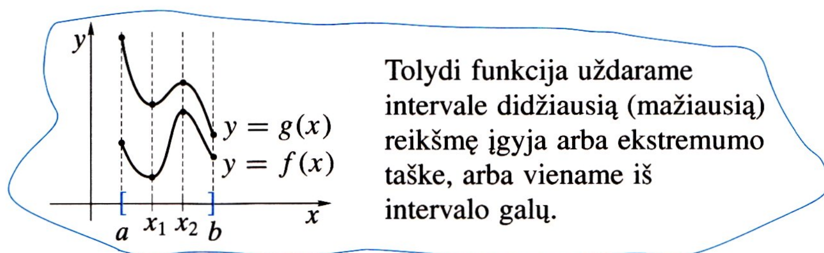
a) $g(x) = \ln x - x + 1$; b) $g(x) = x^2 - 2\ln x$;
c) $g(x) = \frac{\ln x}{x}$; d) $g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
e) $g(x) = \frac{x}{\ln x}$; f) $g(x) = \ln \frac{x}{x-1}$.

126. Ištirkite funkciją $h(x)$ ir nubraižykite jos grafiką:

a) $h(x) = \sin^2 x$; b) $h(x) = \sin x - \sin^2 x$;
c) $h(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$; d) $h(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

6.2. Funkcijos didžiausia ir mažiausia reikšmė uždarame intervale

Kartais reikia nustatyti, kokią didžiausią arba mažiausią reikšmę tolydi funkcija įgyja uždarame intervale. Palyginkime grafikus dviejų funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$, apibrėžtų tame pačiame intervale $[a; b]$.



Taškas x_1 yra abiejų funkcijų minimumo taškas, taškas x_2 — maksimumo. Taške x_1 funkcija $f(x)$ įgyja mažiausią reikšmę, taške x_2 — didžiausią. Tačiau funkcija $g(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmes įgyja intervalo galuose a ir b.

Tolydi funkcija uždarame intervale didžiausią (arba mažiausią) reikšmę įgyja arba ekstremumo taške, arba intervalo pradžios ar galo taške.

Funkcijos $f(x)$ didžiausią reikšmę intervale $[a; b]$ žymėsime

$$\max_{[a;b]} f(x),$$

o mažiausią —

$$\min_{[a;b]} f(x).$$

Panagrinėkime pavyzdžių.

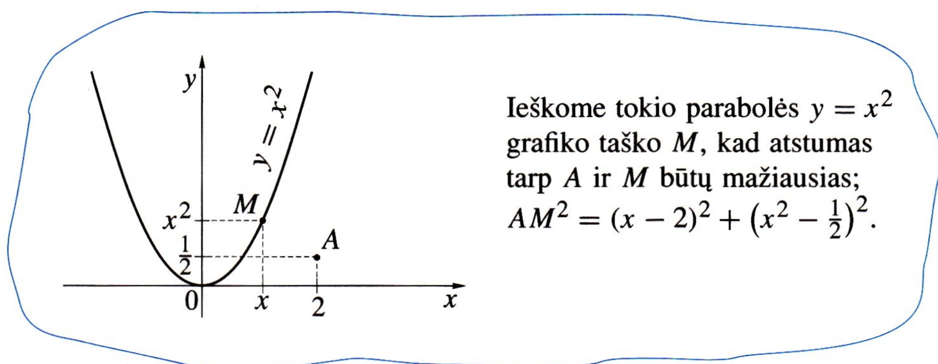
1 PAVYZDYS. Rasime funkcijos $f(x) = \sqrt{2-x}$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale $[0; 1]$.
Raskime funkcijos ekstremumo taškus, priklausančius intervalui $[0; 1]$. Kadangi

$$f'(x) = \left(\sqrt{2-x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot (2-x)' = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}},$$

tai nei viename intervalo $(0; 1)$ taške išvestinė nelygi nuliui. Vadinasi, kritinių taškų funkcija neturi. Taigi didžiausią ir mažiausią reikšmes ji įgyja intervalo galuose. Skaičiuojame: $f(0) = \sqrt{2}$, $f(1) = 1$. Taigi

$$\max_{[0;1]} f(x) = \sqrt{2}, \quad \min_{[0;1]} f(x) = 1.$$

2 PAVYZDYS. Raskime funkcijos $f(x) = x^2$ grafiko tašką, kurio abscisė $x \in [0; 2]$, artimiausią taškui $A(2; \frac{1}{2})$.



Apskaičiuokime funkcijos $f(x)$ grafiko taško $M(x; x^2)$ atstumo iki taško $A(2; \frac{1}{2})$ kvadratą:

$$AM^2 = (x-2)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = x^4 - 4x + 4\frac{1}{4}.$$

Jeigu rasime x, kuriam AM^2 yra mažiausias, tai ir atstumas AM bus mažiausias. Vadinasi, reikia rasti funkcijos

$$g(x) = x^4 - 4x + 4\frac{1}{4}$$

mažiausią reikšmę intervale $[0; 2]$. Randame funkcijos $g(x)$ ekstremumo taškus:

$$g'(x) = \left(x^4 - 4x + 4\frac{1}{4}\right)' = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1);$$

$$g'(x) = 0, \text{ kai } x = 1.$$

Lyginame funkcijos $g(x)$ reikšmes taškuose $x = 0$, $x = 1$ ir $x = 2$:

$$g(0) = 4\frac{1}{4}, \quad g(1) = 1\frac{1}{4}, \quad g(2) = 12\frac{1}{4}.$$

Taigi artimiausias taškui A funkcijos

$$f(x) = x^2$$

grafiko taškas, kurio abscisė $x \in [0; 2]$, yra taškas $M(1; 1)$.
Beje, $x = 1$ yra vienintelis funkcijos $g(x)$ minimumo taškas, kai $x \in \boldsymbol{R}$. Taigi taškas $M(1; 1)$ yra artimiausias taškui $A(2; \frac{1}{2})$ iš visų funkcijos $f(x)$ grafiko taškų, o ne tik iš tų, kurių abscisė $x \in [0; 2]$.

3 PAVYZDYS. Valstietis ketina įrengti stačiakampio formos aptvarą vištoms. Kokį didžiausią plotą jis gali aptverti, turėdamas 20 m vielos tinklo?
Pažymėkime stačiakampio aptvaro kraštinių ilgius x, y. Tada aptvaro perimetras

$$2(x+y) = 20, \quad x+y = 10,$$

o plotas

$$S = x \cdot y.$$

Įstatę $y = 10 - x$, galime plotą S nagrinėti kaip aptvaro kraštinės ilgio x funkciją:

$$S(x) = x(10-x).$$

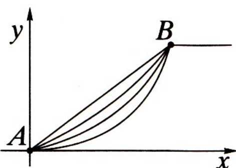
Reikia surasti didžiausią šios funkcijos reikšmę, kai $0 \leqslant x \leqslant 10$.
Žinoma, šį uždavinį galima nesunkiai išspręsti ir be išvestinių. Tačiau pasinaudokime jomis:

$$S'(x) = \big(x(10-x)\big)' = \big(10x - x^2\big)' = 10 - 2x;$$
$$S'(x) = 0, \text{ kai } x = 5.$$

Kadangi

$$S(0) = 0, \quad S(5) = 25, \quad S(10) = 0,$$

tai didžiausia funkcijos $S(x)$ reikšmė intervale [0; 10] lygi 25; tai ir yra didžiausias plotas, kurį valstietis gali aptverti.



Kokios formos turi būti kalno šlaitas, kad iš taško B į tašką A rogutėmis nušliuožtume greičiausiai?

Naudodamiesi išvestinėmis sprendžiame funkcijų didžiausių ar mažiausių reikšmių radimo uždavinius. Tačiau ir išvestinės nevisagalės. Būna uždavinių apie mažiausias ir didžiausias dydžių reikšmes, kuriems išspręsti prisireikia daug išmonės. Pavyzdžiui, Galilėjui ir jo amžininkams labai rūpėjo toks klausimas: kokios formos kreive reikia sujungti aukščiau esantį tašką B su žemiau esančiu tašku A, kad kūnas, paleistas iš taško B riedėti žemyn, tašką A pasiektų greičiausiai? Teisingą atsakymą nurodė šveicarų matematikas J. Bernulis: ta kreivė turi būti cikloidė!

Pratimai ir uždaviniai

127. Raskite funkcijos didžiausią ir mažiausią reikšmę intervale. Nubraižykite brėžinį:

a) $f(x) = x^2 - 3x$, $x \in [-1; 2]$;
b) $f(x) = 6 + x - x^2$, $x \in [0; 2]$;
c) $f(x) = x^2(x - 2)$, $x \in [-1; 2]$;
d) $f(x) = x(x^2 + 3)$, $x \in [-1; 2]$;
e) $f(x) = x(x^2 - 12)$, $x \in [-3; 4]$;
f) $f(x) = \ln x + x$, $x \in [1; \mathrm{e}]$;
g) $f(x) = x - \sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$;
h) $f(x) = \mathrm{e}^x - x$, $x \in [-1; 2]$.

128. Raskite funkcijos $g(x)$ mažiausią reikšmę intervale:

a) $g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x}$, $x \in [-1; 8]$;
b) $g(x) = 3x + \frac{9}{x} + \frac{4}{x^3}$, $x \in [1; 3]$;
c) $g(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$, $x \in [1; 9]$;
d) $g(x) = \frac{2x^3}{x^2-9}$, $x \in [4; 9]$;
e) $g(x) = \ln(2x) - x^2 + x$, $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$;
f) $g(x) = 2x - \operatorname{tg} x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

129. Raskite funkcijos $h(x)$ didžiausią reikšmę intervale:

a) $h(x) = x^{\frac{5}{2}} - 20x$, $x \in [1; 9]$;
b) $h(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 16}$, $x \in [1; 6]$;
c) $h(x) = 2\sin x - \cos 2x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$;
d) $h(x) = \frac{x}{2} + \sin^2 x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

130. Raskite mažiausią atstumą tarp taško A ir funkcijos $f(x)$ grafiko taškų:

a) $f(x) = 2x + 3$, $A(3; 2)$;
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, $A(2; 0)$;
c) $f(x) = x^2 + 6x + 10$, $A(1; 0)$;
d) $f(x) = \sqrt{x + \mathrm{e}^{-x}}$, $A(0; 0)$.

131. Skaičių 10 išreikškite dviejų teigiamų dėmenų suma taip, kad jų kvadratų suma būtų mažiausia.

132. Skaičių 8 išreikškite dviejų teigiamų dėmenų suma taip, kad jų kubų suma būtų mažiausia.

133. Skaičių 36 išskaidykite į du teigiamus daugiklius taip, kad jų kvadratų suma būtų mažiausia.

134. Nubraižytas stačiakampis taip, kad viena jo viršūnė yra koordinačių pradžios taške $O(0; 0)$, dvi kitos — ašyse Ox ir Oy, o ketvirtoji — parabolėje $y = 3 - x^2$, $x \geqslant 0$. Koks didžiausias galimas tokio stačiakampio plotas?

135. Per tašką $A(1; 2)$ nubrėžta tiesė kerta koordinačių ašis taškuose $B(x_0; 0)$ ir $C(0; y_0)$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.
a) Užrašykite lygtį tiesės, kuriai atkarpa BC yra trumpiausia.
b) Raskite, koks gali būti mažiausias trikampio OBC plotas (O — koordinačių pradžios taškas).

136. Kaip reikia sulenkti 1 m ilgio vielos gabalą, kad jis apribotų didžiausio ploto stačiakampį?

137. Iš visų į pusskritulį įbrėžtų stačiakampių (vieno stačiakampio kraštinė yra pusskritulio skersmenyje) raskite tą, kurio plotas yra didžiausias.

138. Iš visų į pusskritulį įbrėžtų trapecijų (vienas trapecijos pagrindas yra pusskritulio skersmuo) raskite tą, kurios plotas yra didžiausias.

139. Iš kartono lapo 30 cm × 14 cm iškirpus kampuose lygius kvadratus, padaryta dėžutė be dangtelio. Kokio dydžio kvadratus reikia iškirpti, kad dėžutės talpa būtų didžiausia?

140. Apskaičiuokite didžiausią galimą ritinio tūrį, kai jo viso paviršiaus plotas lygus S.

Priminimas. Ritinio tūrio formulė:
$V_{\text{rit}} = S_{\text{p}} \cdot h$, čia S_{p} — ritinio pagrindo plotas, h — aukštinė.

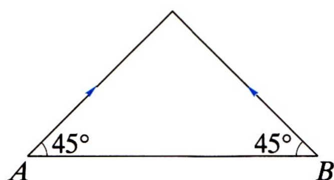
---

141. Apskaičiuokite didžiausią galimą kūgio tūrį, kai jo sudaromoji lygi l.

Priminimas. Kūgio tūrio formulė:
$V_{\text{kūg}} = \frac{1}{3} S_{\text{p}} \cdot h$, čia S_{p} — kūgio pagrindo plotas, h — aukštinė.

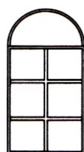
---

142. Iš taškų A ir B, tarp kurių yra 240 km, tuo pat metu brėžinyje nurodytomis kryptimis išvažiavo motociklininkas 60 km/h greičiu (iš A) ir dviratininkas — 20 km/h (iš B).



Po kurio laiko atstumas tarp jų bus mažiausias?

143. Lango, kurio apatinė dalis stačiakampis, o viršutinė — pusskritulis, perimetras lygus 8 m.



Koks turi būti pusskritulio spindulys, kad lango angos plotas būtų didžiausias?

7. Kartojimo uždaviniai

Ribos ir išvestinės

1. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$;

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+x+1}$; d) $f(x) = \sqrt{x(x+1)(x+2)}$.

2. Raskite funkcijos $f(x) = x^2 - 4x + 3$ reikšmių intervalą, kai:

a) $x \in [0; 1]$; b) $x \in [1; 3]$;

c) $x \in [2; 4]$; d) $x \in [-1; 4]$.

3. Apskaičiuokite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 3x + 1)$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+2x}{x^2+x-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+1}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

4. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$; b) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{(x-3)(x-2)}$;

c) $f(x) = \frac{x^2-7x+12}{x-3}$; d) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

5. Raskite funkcijos ribą, nubraižykite funkcijos grafiką:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to -5} \frac{x^2+8x+15}{x+5}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$; d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$.

6. Raskite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x-2}$; d) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3+2x}}{x^2-1}$.

7. Ar egzistuoja riba $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

a) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kai } x < 0, \\ 1, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kai } x < 0, \\ x-1, & \text{kai } x > 0? \end{cases}$

8. Ar funkcija $f(x)$ tolydi taške $x = 1$:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ x^2 - 4x + 4, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{kai } x \neq 1, \\ 3, & \text{kai } x = 1? \end{cases}$

9. Ar funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ yra tolydi intervale:

a) $(0; 3)$;

b) $(-5; -3)$;

c) $(-2; -1)$;

d) $(-1; 1)$?

10. Sakykime, kad funkcija $f(x)$ yra tolydi realių skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$. Ar bus tolydžios aibėje $\boldsymbol{R}$ funkcijos:

a) $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kai } f(x) > 0, \\ 0, & \text{kai } f(x) \leqslant 0; \end{cases}$

b) $f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } f(x) \geqslant 0, \\ f(x), & \text{kai } f(x) < 0? \end{cases}$

Patarimas. Nežinote nuo ko pradėti? Nusibraižykite kokios nors funkcijos, pavyzdžiui, $f(x) = \sin x$ grafiką ir pagalvokite, kaip atrodys funkcijų $f_1(x)$ ir $f_2(x)$ grafikai.

---

11. Pateikite pavyzdžių funkcijų, tolydžių intervaluose $I_1 = [0; 1)$ ir $I_2 = [1; 2]$, bet trūkių aibėje $I_1 \cup I_2 = [0; 2]$.

12. Raskite skaičių k, su kuriuo funkcija $f(x)$ būtų tolydi aibėje $\boldsymbol{R}$. Nubraižykite jos grafiką:

a) $f(x) = \begin{cases} x + k, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ (x-1)^2, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{kai } |x| \leqslant 1, \\ k - x^2, & \text{kai } |x| > 1; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x + k, & \text{kai } x < 0, \\ \mathrm{e}^{-x} - k, & \text{kai } x \geqslant 0; \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \ln k, & \text{kai } x < 0, \\ \ln(x + k), & \text{kai } x \geqslant 0. \end{cases}$

13. Nubraižykite funkcijos grafiką ir ištirkite jos tolydumą:

a) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$;

b) $f(x) = \frac{|x|-x}{x^2}$;

c) $f(x) = \frac{|x^2+3x+2|}{x^2+3x+2}$;

d) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.

14. Apskaičiuokite $f(x + \Delta x)$, kai:

a) $f(x) = 2x^2 - x$;

b) $f(x) = 3x^2 + 2x$.

15. Apskaičiuokite $\Delta f(2)$, kai:

a) $f(x) = 3x + 5$, $\Delta x = 0{,}01$; b) $f(x) = x - 3x^2$, $\Delta x = 0{,}2$;
c) $f(x) = 2x^2 - 3x$, $\Delta x = 0{,}1$; d) $f(x) = x^3 + x^2$, $\Delta x = 0{,}1$.

16. Oy ašyje judančio taško padėtį laiko momentu t nusako funkcija $y(t) = 1 + t^2$.

a) Apskaičiuokite, kaip pakito taško padėtis laikotarpiu nuo $t = 1$ iki $t = 3$.
b) Apskaičiuokite $\Delta y(3)$, jei $\Delta t = 0{,}01$.

17. Naudodami funkcijos išvestinės apibrėžimą, raskite $f'(x_0)$:

a) $f(x) = 8x - 1$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = 2x^2 + x$, $x_0 = 1$;
c) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x_0 = 0$; d) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x_0 = 1$.

18. Raskite daugianario išvestinę:

a) $p(x) = 3x^2 - 6$; b) $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$;
c) $p(x) = 5x^2 - x^{10}$; d) $p(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$;
e) $p(x) = x^2(x^3 + 4)$; f) $p(x) = x^6(3x^2 - 1)$.

19. Pateikite pavyzdį tolydžios funkcijos, neturinčios išvestinės taškuose $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

20. Parašykite funkcijos $y = x(x - 2)$ grafiko liestinės taške x_0 lygtį. Nubraižykite funkcijos grafiką ir liestinę:

a) $x_0 = 2$; b) $x_0 = 1$; c) $x_0 = 0$; d) $x_0 = -1$.

21. Raskite kampą, kurį sudaro funkcijos $f(x)$ grafiko liestinė taške x_0 su abscisių ašimi:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = (x - 1)^2$, $x_0 = \frac{1}{2}$;
c) $f(x) = x^5$, $x_0 = 0$; d) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 0$.

22. Raskite funkcijos $f(x)$ grafiko tašką, kuriame liestinė yra lygiagreti nurodytai tiesei. Nubraižykite brėžinį:

a) $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $y = 5x + 2$; b) $f(x) = 3x^2 - 1$, $y = -3x + 2$;
c) $f(x) = 2x^2 + 3x$, $y = x - 1$; d) $f(x) = x^2 - 3x$, $y = -2x + 3$.

23. Raskite funkcijos $g(x)$ grafiko tašką, kuriame liestinė yra statmena nurodytai tiesei. Nubraižykite brėžinį:

a) $g(x) = 2x - x^2$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$; b) $g(x) = 3 - x - x^2$, $y = \frac{1}{3}x + 2$;
c) $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4$, $x + y = 0$; d) $g(x) = x^2 + x + 1$, $x + 5 = 0$.

24. Su kuria a reikšme tiesė $y = 3x + a$ yra funkcijos $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ grafiko liestinė?

25. Su kuriomis a reikšmėmis tiesės $y = ax + 4$ yra funkcijos $f(x) = (x-2)^2 + 1$ grafiko liestinės?

26. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = x^7(x^2 - 1)$;
b) $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4}$;
c) $f(x) = x^3(2\sqrt{x} + 1)$;
d) $f(x) = x^{\sqrt{2}} - x^{-\sqrt{2}}$;
e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2}$;
f) $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{x}$.

27. Raskite $f'(x_0)$, kai:

a) $f(x) = x^2 \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
b) $f(x) = x \operatorname{tg} x$, $x_0 = \pi$;
c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x_0 = 1$;
d) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 2}$, $x_0 = \pi$.

28. Su kuriomis x reikšmėmis $f'(x) = 5$, kai $f(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$?

29. Išspręskite lygtį: $f'(x) = \frac{f(0)}{x}$, kai $f(x) = \frac{-x-9}{6x-18}$.

30. Taškas juda tiese pagal dėsnį $s(t) = \sqrt[3]{t^2}$. Įrodykite, kad jo pagreitis yra atvirkščiai proporcingas nueito kelio kvadratui.

31. Surašykite didėjimo tvarka skaičius $f'(1)$, $f'(\mathrm{e})$, $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$, kai $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

32. Raskite $f(g(x))$ ir $g(f(x))$, jei:

a) $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = x^2$;
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;
c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$;
d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$.

Kurioms funkcijų poroms teisinga lygybė $f(g(x)) = g(f(x))$?

33. Raskite $g'(x)$, jei:

a) $g(x) = \cos^3 x$;
b) $g(x) = \operatorname{tg} 3x$;
c) $g(x) = \sin^2 3x$;
d) $g(x) = \ln^2 x$;
e) $g(x) = x^2 \mathrm{e}^{2x}$;
f) $g(x) = \log_3^3 x$.

34. Raskite $f'(x_0)$, kai:

a) $f(x) = 3^{3x}$, $x_0 = 1$;
b) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{x+1}$, $x_0 = 0$;
c) $f(x) = \sin 2x \cdot \mathrm{e}^{3x}$, $x_0 = 0$;
d) $f(x) = x^3 \cdot \ln x$, $x_0 = 1$.

35. Įrodykite, kad funkcija $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ ir jos išvestinė $f'(x)$ tenkina lygybę $(x^2 + 1) f'(x) = 1 + x f(x)$ su visais $x \in \boldsymbol{R}$.

36. Dviejų materialiųjų taškų, judančių tiese Ox, padėtys laiko momentu t nusakomos funkcijomis $x_1(t) = 4t^2 + 2$ ir $x_2(t) = 3t^2 + 4t - 1$.
Apskaičiuokite:
a) kada abu kūnai susitiks;
b) jų greičius susitikimo momentu.

37. Atrėmus 5 m ilgio kopėčias į sieną, jų apatinis galas pradėjo pastoviu 2 m/s greičiu tolti nuo sienos. Kokiu greičiu leidžiasi kopėčių viršutinis galas?

38. Per sekundę į rutulio formos balioną įpučiama po 4,5 dm^3 oro.
a) Koks bus baliono spindulys po 27 sekundžių?
b) Kokiu greičiu tada didės baliono spindulys?

39. Įrodykite, kad funkcija visoje apibrėžimo srityje yra didėjanti:

a) $f(x) = x^3 + x$;
b) $f(x) = \sqrt{x} + e^x$;
c) $f(x) = x + \sqrt{1 + x}$;
d) $f(x) = 5x - 2\cos 2x$.

40. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus:

a) $f(x) = 5x + 1$;
b) $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$;
c) $f(x) = x^2 - 8x$;
d) $f(x) = x^3 - 12x$;
e) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$;
f) $f(x) = x^4 - 8x^2$.

41. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus:

a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;
b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$;
c) $f(x) = xe^{-3x}$;
d) $f(x) = x^2 \ln x$.

42. Raskite visas a reikšmes, su kuriomis funkcija $g(x)$ intervale I yra mažėjanti:

a) $g(x) = ax^2 - \ln x$, $I = (0; 5)$;
b) $g(x) = \ln x - ax^2$, $I = (2; +\infty)$.

43. Raskite funkcijos $h(x)$ kritinius taškus:

a) $h(x) = 2 - 2x + 5x^2$;
b) $h(x) = 3x^3 - 9x^2$;
c) $h(x) = 2x + \cos x$;
d) $h(x) = 2 - \cos 2x$.

44. Raskite funkcijos $f(x)$ ekstremumus:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$;
b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x$;
c) $f(x) = 2x^4 - 16x^2$;
d) $f(x) = 3x^5 + 5x^3$.

45. Raskite funkcijos $f(x)$ ekstremumus:

a) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$; b) $f(x) = \sin x - x$;
c) $f(x) = 2\ln x - x^2$; d) $f(x) = \frac{1}{x}e^x$.

46. Parašykite funkcijos $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ grafiko liestinės lygtį jos minimumo taške.

47. Raskite funkcijos $g(x)$ reikšmių sritį:

a) $g(x) = x^2 - 8x + 12$; b) $g(x) = x^4 + 32x$;
c) $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$; d) $g(x) = x + \sqrt{3-x}$.

48. Ištirkite funkciją ir nubraižykite jos grafiką:

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$; b) $f(x) = x^3 - 3x$;
c) $f(x) = x^4 - 2x^2$; d) $f(x) = x^4 + 2x^3$.

49. Ištirkite funkciją ir nubraižykite jos grafiką:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$;
c) $f(x) = x\sqrt{3-x}$; d) $f(x) = (x-1)e^x$.

50. Raskite funkcijos $g(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmę intervale I:

a) $g(x) = x^2 + x$, $I = [0; 4]$; b) $g(x) = 2x^2 - 4$, $I = [-1; 2]$;
c) $g(x) = x^3 - 12x$, $I = [-1; 3]$; d) $g(x) = x^4 - 4x^2$, $I = [-2; 2]$.

51. Raskite funkcijos $g(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmę intervale I:
a) $g(x) = \frac{x}{x^2+4}$, $I = [-4; 2]$;
b) $g(x) = (x-3)e^{-x}$, $I = [0; \ln 100]$.

52. Kokia turi būti a reikšmė, kad funkcijos $h(x) = x^3 - 3x + a$ didžiausia reikšmė intervale $[-2; 0]$ būtų lygi 5?

53. Raskite mažiausią funkcijos $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x + 1$ išvestinės reikšmę intervale $[-2; 2]$.

54. Skaičių 20 užrašykite dviejų teigiamų skaičių suma taip, kad vieno iš jų kubo, o kito kvadrato suma būtų mažiausia.

55. Reikia pagaminti $4\,\text{m}^3$ talpos taisyklingosios keturkampės prizmės formos dėžę be dangčio. Kokie turi būti dėžės matmenys, kad jai pagaminti reikėtų mažiausiai medžiagos?

56. Raskite aukštinę mažiausio tūrio kūgio, kurį galima apibrėžti apie 4 cm spindulio rutulį.

Įvairūs uždaviniai

57. Troleibusai važiuoja gatve abiem kryptimis 25 km/h greičiu. Į stoteles jie atvažiuoja kas 16 minučių. Kaip dažnai troleibusai pralenks žmogų, einantį gatve 5 km/h greičiu? Kaip dažnai jis sutiks priešais atvažiuojantį troleibusą?

58. Išskaidykite dauginamaisiais:

a) $a^6 - b^6$; b) $(a+b)^3 - (a-b)^3$.

59. Išspręskite lygtį:

$$x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}.$$

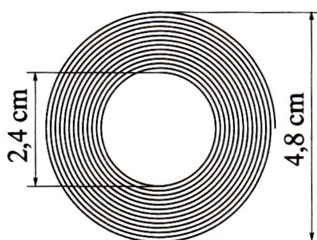
60. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{1}{x-3} > 2$; b) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+10} > 0$.

61. Išspręskite lygtį:

a) $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$; b) $\frac{2^x}{5^{x-1}} + 3 = \frac{5^x}{2^{x-1}}$.

62. Audio kasetės juostelės ilgis — 84,78 m ($\approx 27\pi$ m). Kasetėje yra dvi ritės. Ritės šerdies skersmuo — 2,4 cm. Kai visa juosta susukta į vieną ritę, jos skersmuo būna 4,8 cm.

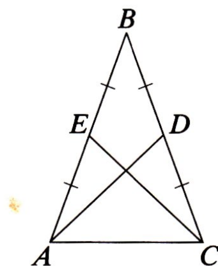


Kiek kartų apsisuka ritė, kai visa juosta nuo jos pervyniojama į kitą ritę (pavyzdžiui, kai išklausome visus įrašus)? Koks juostelės storis?

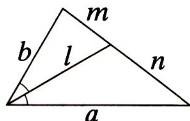
Patarimas. Įsivaizduokite, kad pilna ritė sudaryta iš sluoksnių, kaip parodyta brėžinyje.

---

63. Lygiašoniame trikampyje ABC iš pagrindo galų išvestos pusiaukraštinės AD ir CE. Trikampio AEC perimetras yra 5 cm didesnis už trikampio ABD perimetrą, o trikampio ABC perimetras lygus 35 cm. Raskite trikampio ABC kraštinių ilgius.



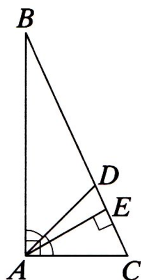
64. Trikampio dvi kraštinės lygios a ir b. Tų kraštinių sudaryto kampo pusiaukampinė l dalija trečiąją trikampio kraštinę į atkarpas m ir n. Įrodykite, kad pusiaukampinės ilgį galima apskaičiuoti pagal formulę $l^2 = ab - mn$.



Patarimas. Apie trikampį apibrėžkite apskritimą, pratęskite pusiaukampinę iki susikirtimo su apskritimu ir pagalvokite, kokius panašiuosius trikampius verta nagrinėti.

---

65. Stačiojo trikampio stataus kampo pusiaukampinė dalija įžambinę santykiu 1 : 2. Kokiu santykiu įžambinę dalija aukštinė?



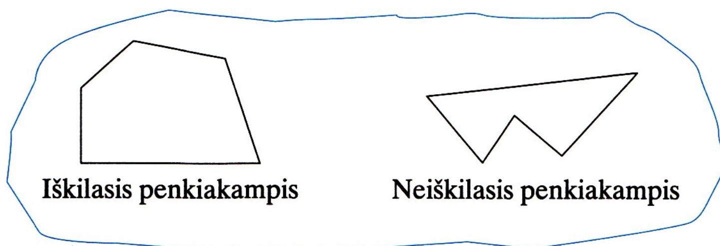
$CD : DB = 1 : 2$
$CE : EB = ?$

66. Nubrėžtos visos daugiakampio įstrižainės. Kiek kraštinių turi daugiakampis, jei:

a) įstrižainių yra trigubai daugiau, negu kraštinių;

b) įstrižainių yra 12 daugiau, negu kraštinių?

67. Koks didžiausias skaičius smailiųjų kampų gali būti iškilajame daugiakampyje?



68. Jei vieną kvadrato kraštinę sutrumpinsime 4 cm, o antrą sutrumpinsime 5 cm, tai gautojo stačiakampio plotas bus $160\,cm^2$ mažesnis už duotojo kvadrato plotą. Keliais procentais sumažės kvadrato plotas?

69. Stačiakampio ilgis padidėjo 10%, o jo plotis sumažėjo 5%. Keliais procentais padidėjo stačiakampio plotas?

70. Algis gavo 8 elektroninio pašto laiškus: penkiuose buvo geros naujienos, trijuose — blogos. Visus juos jis nusprendė persiųsti savo draugui, tačiau netyčia 3 laiškus ištrynė, todėl nusiuntė 5. Kokia tikimybė, kad jo draugas gavo mažiau laiškų su blogomis naujienomis, negu Algis?

71. Testą sudaro 5 klausimai. Kiekvienam klausimui pateikti 3 pasirenkamieji atsakymai, iš kurių tik vienas teisingas. Testas laikomas išlaikytu, jeigu bent į 3 iš 5 klausimų atsakyta teisingai. Kokia tikimybė išlaikyti testą renkantis atsakymus atsitiktinai?

72. Vienos Viduržemio jūros salos 30% gyventojų kalba tik graikiškai, 60% — gali susikalbėti ispaniškai, 50% — prancūziškai. Kokia tikimybė, kad atvykėlis į šią salą galės su pirmu sutiktu salos gyventoju susikalbėti ir ispaniškai, ir prancūziškai?

73. Tvenkinyje veisiasi karosai ir karpiai. Žvejai mano, kad 20% tvenkinio žuvų sveria daugiau kaip 0,5 kg. Taip pat manoma, kad 40% visų stambiųjų (t. y. sunkesnių nei 0,5 kg) tvenkinio žuvų sudaro karosai, o likusios stambiosios žuvys — karpiai. Įsivaizduokime, kad žvejui užkibo. Nors į krantą dar neištraukta, tačiau žvejas jaučia, kad žuvis didelė — svers daugiau nei 0,5 kg. Kokia tikimybė, kad užkibo karpis?

74. Du draugai vilniečiai paprastai susitinka trijose vietose: prie rotušės, prie Arkikatedros arba Sereikiškių parke. Abu susitarė susitikti 15 valandą, bet pamiršo susitarti, kurioje vietoje. Kokia tikimybė, kad 15 valandą jie susitiks?

75. Dvi merginos ir trys vaikinai ketina atsitiktinai susėsti 5 pirmosiose kino teatro eilės vietose. Jeigu mergina ir vaikinas sėdi greta, sakome, kad susidarė pora. Kokia tikimybė, kad susidarys lygiai viena pora?

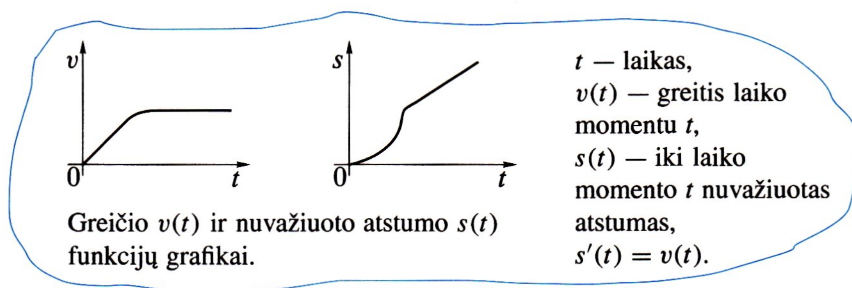
II Integralai



8. Pirmykštės funkcijos ir neapibrėžtiniai integralai

8.1. Pirmykštės funkcijos sąvoka

Įsivaizduokime, kad važiuojame moderniu automobiliu, kuriame įrengtas kompiuteris kruopščiai fiksuoja ir važiavimo greitį, ir nuvažiuotą kelią. Tarkime, ekrane brėžiamos dvi kreivės: viena rodo, kaip bėgant laikui kinta greitis, kita — kaip didėja nuvažiuotas atstumas.



Greičio $v(t)$ ir nuvažiuoto atstumo $s(t)$ funkcijų grafikai.

t — laikas,
$v(t)$ — greitis laiko momentu t,
$s(t)$ — iki laiko momento t nuvažiuotas atstumas,
$s'(t) = v(t)$.

Jeigu programa, brėžianti greičio kitimo grafiką sugestų, kelionės pabaigoje turėtume tik atstumo kitimo kreivę, t. y. turėtume kelio funkciją $s(t)$. Norėdami sužinoti, kaip keitėsi greitis, turėtume skaičiuoti žinomos kelio funkcijos $s(t)$ išvestinę. Jeigu priešingai — kelionės pabaigoje žinotume, kaip keitėsi greitis, t. y. žinotume funkciją $v(t)$, tai norėdami sužinoti, kaip keitėsi nuvažiuotas kelias, turėtume rasti funkciją $s(t)$, kad $s'(t) = v(t)$.
Kai žinodami funkcijos išvestinę ieškome pačios funkcijos, sakome, kad ieškome pirmykštės funkcijos, tarsi pabrėždami, kad norime surasti, iš kur žinomoji funkcija atsirado.

APIBRĖŽIMAS
Jeigu funkcijos $F(x)$ išvestinė yra $f(x)$, t. y. $F'(x) = f(x)$, tai funkciją $F(x)$ vadiname funkcijos $f(x)$ pirmykšte funkcija.

Taigi nuvažiuoto kelio funkcija $s(t)$ yra greičio funkcijos $v(t)$ pirmykštė funkcija.

1 PAVYZDYS. Kadangi $(x^3)' = 3x^2$, tai funkcija $F(x) = x^3$ yra funkcijos $f(x) = 3x^2$ pirmykštė.
Kadangi $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$, tai funkcija $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ yra funkcijos $f(x) = x^2$ pirmykštė.
Kadangi $(\sin x + 5)' = \cos x$, tai funkcija $F(x) = \sin x + 5$ yra funkcijos $f(x) = \cos x$ pirmykštė.

1 *užduotis*. Kiekvienai iš funkcijų $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $h(x) = \sin x$ raskite po vieną pirmykštę.

Galbūt jau pastebėjote, kad funkcija turi ne vieną pirmykštę. Iš tikrųjų, kadangi, pavyzdžiui,

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2, \quad \left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right)' = x^2, \quad \left(\frac{1}{3}x^3 - 1\right)' = x^2,$$

tai visos trys funkcijos $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3 + 2$, $\frac{1}{3}x^3 - 1$ yra tos pačios funkcijos $f(x) = x^2$ pirmykštės. Apskritai, su bet kokiu skaičiumi C funkcija

$$\frac{1}{3}x^3 + C$$

yra funkcijos $f(x) = x^2$ pirmykštė. Keisdami C reikšmes gautume vis kitas tos pačios funkcijos $f(x) = x^2$ pirmykštes. Šitaip galime gauti bet kurią šios funkcijos pirmykštę.

2 *užduotis*. Raskite funkcijos $f(x) = x^2$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas eitų per tašką $(3; 0)$.

Be galo daug pirmykščių turi ne tik funkcija $f(x) = x^2$, bet ir kitos funkcijos.

Jeigu** $F(x)$ **yra funkcijos** $f(x)$ **pirmykštė funkcija, t. y.** $F'(x) = f(x)$, **tai bet kurią kitą funkcijos** $f(x)$ **pirmykštę funkciją galima užrašyti taip:

$$F(x) + C,$$

čia** C **yra skaičius.

Taigi žinodami vieną funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$, visas kitas šios funkcijos pirmykštes funkcijas gauname iš reiškinio $F(x)+C$ įstatę vietoj C skaičius. Šį reiškinį vadiname *neapibrėžtiniu* funkcijos $f(x)$ *integralu* ir žymime taip:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Taigi neapibrėžtinis funkcijos integralas yra reiškinys, kurį sudarome prie pirmykštės funkcijos pridėję dėmenį, galintį įgyti bet kokias skaitines reikšmes.

2 PAVYZDYS. Kadangi $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$, tai $\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$.
Kadangi $(\sin x)' = \cos x$, tai $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

3 *užduotis*. Apskaičiuokite

$$\int x^4\,\mathrm{d}x, \quad \int x^5\,\mathrm{d}x.$$

Norint patikrinti, ar teisinga lygybė

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

užtenka tikrinti, ar $F'(x) = f(x)$.

3 PAVYZDYS. Patikrinkime, ar teisingos lygybės $\int \sin(x+1)\,\mathrm{d}x = -\cos(x+1)+C$; $\int 2^x\,\mathrm{d}x = 2^x + C$.
Kadangi $(-\cos(x+1))' = -(\cos(x+1))' = \sin(x+1)$, tai pirmoji lygybė teisinga. Kadangi $(2^x)' = \ln 2 \cdot 2^x \neq 2^x$, tai antroji lygybė neteisinga.

4 *užduotis*. Įsitikinkite, kad su visais $\alpha \neq -1$ teisinga lygybė

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + C.$$

4 PAVYZDYS. Apskaičiuosime integralą

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Žinome, kad $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Ši lygybė teisinga, kai $x > 0$. Taigi funkcijos $f(x)$, kai $x > 0$, pirmykštė yra funkcija $F_1(x) = \ln x$.
Panagrinėkime funkciją $F_2(x) = \ln(-x)$. Ši funkcija apibrėžta, kai $x < 0$;

$$F_2'(x) = \big(\ln(-x)\big)' = (-x)' \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Taigi funkcija $F_2(x) = \ln(-x)$ yra funkcijos $f(x) = \frac{1}{x}$ pirmykštė, kai $x < 0$. Funkcijos $f(x) = \frac{1}{x}$ pirmykštę visoje apibrėžimo srityje galime užrašyti taip:

$$F(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{kai } x > 0, \\ \ln(-x), & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Pastebėkime, kad šią funkciją galime užrašyti panaudoję modulio ženklą:

$$F(x) = \ln|x|.$$

Taigi

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$$

Pagrindinių funkcijų neapibrėžtinių integralų lentelė:

$$1)\quad \int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1);$$

$$2)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C;$$

$$3)\quad \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C;$$

$$4)\quad \int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 1);$$

$$5)\quad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C;$$

$$6)\quad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C;$$

$$7)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

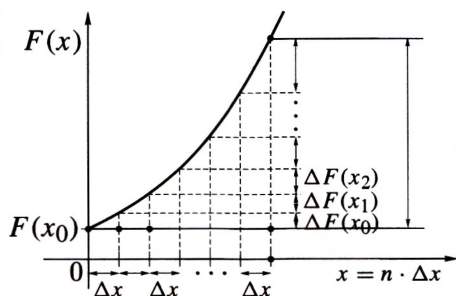
$$8)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

5 *užduotis.* Patikrinkite 3)–8) lygybes.

Kodėl reiškinys, iš kurio gauname visas funkcijos $f(x)$ pirmykštes, žymimas taip keistai:

$\int f(x)\mathrm{d}x$?

Šis V. Leibnico sugalvotas žymuo primena pirmykščių funkcijų ryšį su pokyčiais. Tarkime, kad $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė, t. y. $F'(x) = f(x)$. Tarkime, kad funkcijos apibrėžtos su visais $x \geqslant 0$ ir imkime $x = n \cdot \Delta x$ $(\Delta x > 0)$.



$$F(x) - F(x_0) = \Delta F(x_0) + \Delta F(x_1) + \dots + \\ + \Delta F(x_{n-1})$$

$$\frac{\Delta F(x_i)}{\Delta x} \approx f(x_i), \qquad \Delta F(x_i) \approx f(x_i)\Delta x$$

$$F(x) \approx F(x_0) + f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \\ + \dots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$\int$ yra „išstypusi“ S (suma) raidė, ji primena pokyčių sumą, kuria apytiksliai užrašome pirmykštės funkcijos reikšmę. O dx yra prisiminimas apie Δx.

Pratimai ir uždaviniai

1. Raskite funkciją $f(x)$, kai duota jos pirmykštė funkcija $F(x)$:

a) $F(x) = x^6 + 2$; b) $F(x) = x^5 - x^4$;
c) $F(x) = 1 - \sqrt{x}$; d) $F(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$;
e) $F(x) = 2\cos x + x$; f) $F(x) = 3\mathrm{tg}x - 7$;
g) $F(x) = \mathrm{e}^{3x} - x^3$; h) $F(x) = \ln x^2$.

2. Įsitikinkite, kad $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija:

a) $F(x) = x\sin x$, $f(x) = \sin x + x\cos x$;
b) $F(x) = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{tg}x$, $f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{2}{\cos^2 x}$;
c) $F(x) = \sqrt{2x+1}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$;
d) $F(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

3. Raskite visas funkcijos $f(x)$ pirmykštes funkcijas:

a) $f(x) = x^5$; b) $f(x) = \frac{2}{x}$;
c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; d) $f(x) = -\sqrt{x}$;
e) $f(x) = 3^x$; f) $f(x) = 3\sin x$.

4. Raskite funkcijos $f(x)$ visas pirmykštes funkcijas. Nubraižykite kelių pirmykščių funkcijų grafikus:

a) $f(x) = -2x$; b) $f(x) = 3\cos x$;
c) $f(x) = \frac{1}{2x}$; d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

5. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas eina per tašką M:

a) $f(x) = 2x$, $M(1; 1)$; b) $f(x) = \sqrt{x}$, $M(9; 10)$;
c) $f(x) = x^3$, $M(0; 0)$; d) $f(x) = \cos x$, $M(\pi; \pi)$.

6. Patikrinkite, ar teisinga lygybė:

a) $\int (x+2)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(x+2)^5 + C$; b) $\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C$;
c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(2x)} = \frac{1}{2}\mathrm{tg}(2x) + C$; d) $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x + C$.

7. Funkcijos grafikas eina per koordinačių pradžios tašką. Raskite funkciją, jeigu jos grafiko liestinės, nubrėžtõs taške $x = x_0$, krypties koeficientas lygus:

a) $2x_0$; b) $3x_0^2$;
c) $x_0 + 1$; d) $x_0^2 + 3$.

8.2. Neapibrėžtinių integralų savybės

Funkcijų sumos išvestinė lygi išvestinių sumai: jei $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, tai

$$\big(F(x) + G(x)\big)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Iš šios lygybės gauname, kad funkcijų sumos $f(x) + g(x)$ pirmykštė yra funkcijų suma $F(x) + G(x)$.

Jeigu $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, o $G(x)$ yra funkcijos $g(x)$ pirmykštė funkcija, tai funkcija $F(x)+G(x)$ yra funkcijų sumos $f(x)+g(x)$ pirmykštė.

1 PAVYZDYS. Kadangi funkcija $\frac{1}{5}x^5$ yra funkcijos x^4 pirmykštė, o $\sin x$ yra funkcijos $\cos x$ pirmykštė, tai $\frac{1}{5}x^5 + \sin x$ yra funkcijos $x^4 + \cos x$ pirmykštė funkcija. Taigi

$$\int (x^4 + \cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + \sin x + C.$$

1 užduotis. Apskaičiuokite $\int (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Skaičiuodami išvestines skaitinius daugiklius dažniausiai iškeliame prieš išvestinės ženklą: jei $F'(x) = f(x)$, o k yra skaičius, tai $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.
Ši lygybė reiškia, kad funkcijos $kf(x)$ pirmykštė funkcija yra $kF(x)$.

Jeigu k yra skaičius, $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, tai funkcija $kF(x)$ yra funkcijos $kf(x)$ pirmykštė.

2 PAVYZDYS. Raskime $\int (2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$. Kadangi funkcijos $\sqrt{x}$ pirmykštė funkcija yra $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, tai funkcijos $2\sqrt{x}$ pirmykštė funkcija yra $2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Taigi $\int (2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$.

Įsitikinsime, kad skaičiuojant neapibrėžtinius integralus galime naudotis lygybėmis:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pirmoji lygybė teigia, kad reiškinį, iš kurio gaunamos visos funkcijos $f(x) + g(x)$ pirmykštės funkcijos, gauname sudėję reiškinius, duodančius visas funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ pirmykštes funkcijas. Įsitikinkime, kad taip ir yra.
Jei funkcijos $F(x), G(x)$ yra funkcijų $f(x), g(x)$ pirmykštės, tai

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C_1, \quad \int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + C_2;$$

čia vietoj C_1, C_2 galime įstatyti bet kokius skaičius. Sudėję šiuos reiškinius, gausime:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + G(x) + C_1 + C_2.$$

Pažymėję $C_1 + C_2 = C$ dešinėje pusėje gausime reiškinį $F(x) + G(x) + C$. Tai yra neapibrėžtinis funkcijų sumos $f(x) + g(x)$ integralas. Taigi simboliškai galime rašyti

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Panašiai galime patikrinti ir lygybę $\int (kf(x))\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

3 PAVYZDYS. Apskaičiuokime $\int (\mathrm{e}^x + \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$.
Naudodamiesi neapibrėžtinio integralo savybe gauname:

$$\int \Big(\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C_1 + \ln|x| + C_2 = \mathrm{e}^x + \ln|x| + C.$$

2 *užduotis.* Apskaičiuokite $\int (x^2 + x)\,\mathrm{d}x$, $\int (x^3 + \cos x)\,\mathrm{d}x$.

4 PAVYZDYS. Apskaičiuokime $\int (2\mathrm{e}^x + 1)\,\mathrm{d}x$.
Naudodamiesi neapibrėžtinio integralo savybėmis gauname:

$$\begin{aligned}\int (2\mathrm{e}^x + 1)\,\mathrm{d}x &= \int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x = \\ &= 2(\mathrm{e}^x + C_1) + x + C_2 = 2\mathrm{e}^x + x + 2C_1 + C_2 = \\ &= 2\mathrm{e}^x + x + C;\end{aligned}$$

čia pažymėjome $2C_1 + C_2 = C$.

3 *užduotis.* Apskaičiuokite $\int (2x + 1)^2\,\mathrm{d}x$ pakėlę reiškinį kvadratu ir pasinaudoję neapibrėžtinio integralo savybėmis.

Įrodysime dar vieną pirmykščių funkcijų savybę, kuri praverčia skaičiuojant neapibrėžtinius integralus.
Tegu funkcija $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė, t. y. $F'(x) = f(x)$, o a, b $(a \neq 0)$ du skaičiai. Rasime sudėtinės funkcijos $g(x) = F(ax+b)$ išvestinę.
Naudodamiesi sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisykle gauname:

$$g'(x) = F'(t) \cdot t', \quad t = ax + b.$$

Kadangi $F'(t) = f(t)$, tai

$$\big(F(ax+b)\big)' = f(t)\cdot(ax+b)' = af(ax+b) \quad \text{arba} \quad \Big(\frac{1}{a}F(ax+b)\Big)' = f(ax+b).$$

Ši lygybė parodo, kaip surasti funkcijos $f(ax+b)$ pirmykštę.

Jeigu funkcija $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, o a, b $(a \neq 0)$ du skaičiai, tai funkcijos $g(x) = f(ax+b)$ pirmykštė funkcija yra funkcija $\frac{1}{a}F(ax+b)$.

5 PAVYZDYS. Žinome, kad funkcijos $\cos x$ pirmykštė funkcija yra $\sin x$ (patikriname: $(\sin x)' = \cos x$). Tada funkcijos $\cos(2x+3)$ pirmykštė funkcija yra $\frac{1}{2}\sin(2x+3)$, o funkcijos $\cos(1-3x)$ pirmykštė funkcija yra $\frac{1}{-3}\sin(1-3x) = -\frac{1}{3}\sin(1-3x)$. Taigi

$$\int \cos(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C,$$

$$\int \cos(1-3x)\,dx = -\frac{1}{3}\sin(1-3x) + C.$$

4 *užduotis*. Apskaičiuokite $\int (2x+1)^2\,dx$ nekeldami reiškinio kvadratu, bet pasinaudoję funkcijos $f(ax+b)$ pirmykštės funkcijos radimo taisykle.

Pratimai ir uždaviniai

8. Raskite funkcijos $f(x)$ kurią nors pirmykštę funkciją:

a) $f(x) = 6x^5 + 3x^2$;
b) $f(x) = 24x^3 - 12x^2 + 1$;
c) $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$;
d) $f(x) = 3\sin x - 5e^x$.

9. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą:

a) $\int (x + 3x^2)\,dx$;
b) $\int (2x - 4x^3)\,dx$;
c) $\int (x^2 + 5x^4)\,dx$;
d) $\int (1 - 10x^9)\,dx$;
e) $\int \big(\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}\big)\,dx$;
f) $\int \big(\frac{2}{x} + x\big)\,dx$;
g) $\int \big(2\sqrt{x} - x^{\frac{2}{3}}\big)\,dx$;
h) $\int \big(x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}\big)\,dx$.

10. Raskite funkcijos $f(x)$ kurią nors pirmykštę funkciją:

a) $f(x) = (3x+2)^4$;
b) $f(x) = \frac{1}{2x-1}$;
c) $f(x) = \sqrt{4x+7}$;
d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$;
e) $f(x) = 2^{2x+3}$;
f) $f(x) = \cos(2-x)$.

11. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą:

a) $\int (7x-1)^6\,\mathrm{d}x$;
b) $\int \left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$;
c) $\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x$;
d) $\int \left(\sin 2x - 3\cos(3x)\right)\mathrm{d}x$;
e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(3x-1)}$;
f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(2x+1)}$;
g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x+3}$;
h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2}$.

12. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$, tenkinančią nurodytą sąlygą:

a) $f(x) = -2x+1$, $F(-1) = 2$;
b) $f(x) = \frac{-4}{(2x+1)^2}$, $x > -\frac{1}{2}$, $F(0) = 0$;
c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, $F(1) = 2$;
d) $f(x) = \frac{2}{\cos^2(2x)}$, $|x| < \frac{\pi}{4}$, $F(\frac{\pi}{8}) = 0$.

13. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą:

a) $\int (2x+1)(x-2)\,\mathrm{d}x$;
b) $\int (x+1)(2-x^2)\,\mathrm{d}x$;
c) $\int (3x^2+1)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;
d) $\int (2x+3)\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$;
e) $\int \sin x(\cos x+3)\,\mathrm{d}x$;
f) $\int \left(\sin x\cos(3x) - \cos x\sin(3x)\right)\mathrm{d}x$.

14. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą:

a) $\int \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x$;
b) $\int \frac{2x^2-3x-2}{x}\,\mathrm{d}x$;
c) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
d) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$;
e) $\int \frac{\sqrt{x}-2}{x}\,\mathrm{d}x$;
f) $\int \frac{2x^3-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$;
g) $\int \frac{1-4x^2\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$;
h) $\int \frac{3+2\cos^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Patarimas. Kartais trupmeną, kurios skaitiklyje yra reiškinių suma, patogu užrašyti trupmenų suma. Pavyzdžiui,

$$\frac{3x^4+2x^3+1}{x^4} = \frac{3x^4}{x^4} + \frac{2x^3}{x^4} + \frac{1}{x^4} = 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}.$$

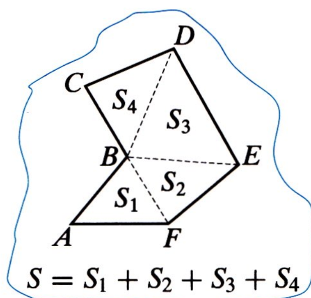
---

15. Taškas juda tiese greičiu $v(t) = 10 - \frac{t}{5}$ (m/s). Raskite kelią, kurį taškas nuėjo per pirmąsias 5 sekundes.

9. Apibrėžtiniai integralai

9.1. Kreivinės trapecijos plotas

Sudėtingos figūros plotą kartais galima apskaičiuoti suskaidžius ją į paprastesnes figūras. Pavyzdžiui, bet kokio daugiakampio plotą galime surasti suskaidę daugiakampį į trikampius ir apskaičiavę trikampių plotus.



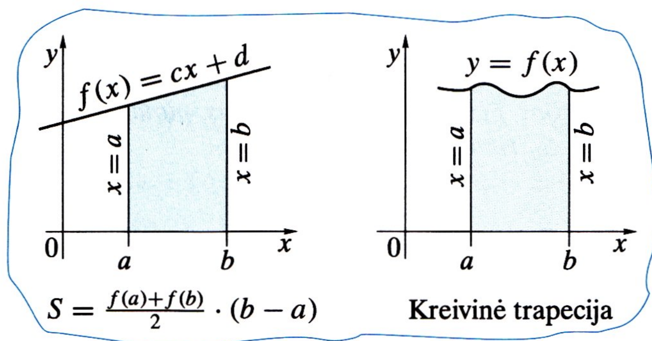
Tačiau taip anaiptol ne visada galime padaryti. Panagrinėkime, pavyzdžiui, figūrą koordinačių plokštumoje, apribotą tiesėmis

$$y = 0, \quad x = a, \quad x = b \quad (a < b)$$

ir tolydžios intervale $[a; b]$ funkcijos $y = f(x)$ grafiku ($f(x) \geqslant 0$). Jeigu funkcija $f(x)$ yra tiesinė, t. y.

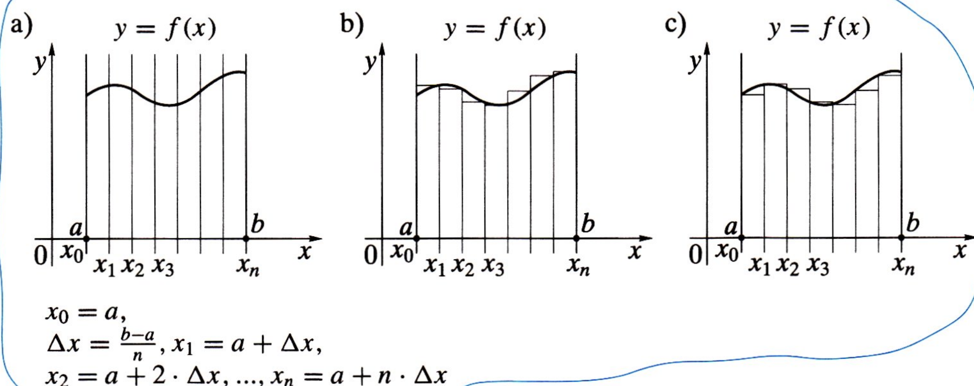
$$f(x) = cx + d,$$

tai ši figūra yra trapecija, ir jos plotą galime apskaičiuoti naudodamiesi žinoma formule. Kai funkcija $f(x)$ nėra tiesinė, gautąją figūrą vadinsime kreivine trapecija.



Kreivinių trapecijų yra visokių, todėl visoms joms tinkančios formulės plotui skaičiuoti nėra. Apytiksliai kreivinės trapecijos plotą galime apskaičiuoti pakeitę ją iš siaurų stačiakampių sudaryta figūra.

Pasirinkime natūralųjį skaičių n ($n > 1$) ir padalykime intervalą $[a; b]$ į n vienodo ilgio $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ intervalų. Per dalijimo taškus nubrėžę tieses, statmenas Ox ašiai, padalysime kreivinę trapeciją į n siauresnių kreivinių trapecijų. Tačiau apskaičiuoti ir šių siauresnių kreivinių trapecijų plotus nėra paprasta. Todėl pakeiskime šias trapecijas siaurais stačiakampiais, kurių pagrindai yra intervalai $[x_k; x_{k+1}]$, o statmenų Ox ašiai kraštinių ilgiai lygūs $f(x_{k+1})$, žr. b) brėž.



Stačiakampio su pagrindu $[x_k; x_{k+1}]$ plotas lygus $(x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1}) = \Delta x \cdot f(x_{k+1})$. Sudėję visus šiuos plotus, kai $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, gausime iš stačiakampių sudarytos figūros plotą

$$S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \cdots + \Delta x \cdot f(x_n),$$

čia $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k \cdot \Delta x$.

Kuo didesnį n pasirinksime, tuo figūra, sudaryta iš stačiakampių, bus panašesnė į kreivinę trapeciją. Kai n neaprėžtai didinsime, jos plotas S_n artės prie kreivinės trapecijos ploto.

Kreivinės trapecijos, kurią koordinačių plokštumoje apriboja tiesės $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$) ir tolydžios funkcijos $f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$) grafikas, plotas S lygus figūrų, sudarytų iš stačiakampių, plotų S_n ribai, t. y.

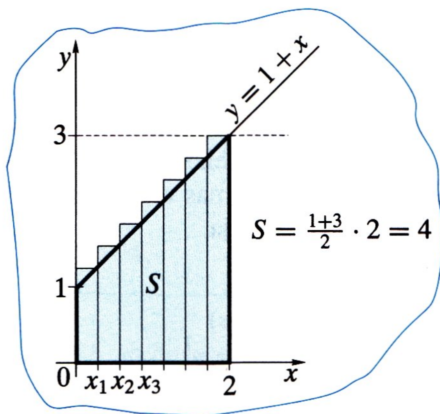
$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

čia $S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \cdots + \Delta x \cdot f(x_n)$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k \cdot \Delta x$.

Siauruosius stačiakampius su pagrindais intervaluose $[x_k; x_{k+1}]$ galėjome brėžti ir kitaip. Pavyzdžiui, c) brėžinyje iš stačiakampių sudaryta figūra yra kitokia negu b) brėžinyje. Taigi figūrų, sudarytų iš mažų stačiakampių, plotų seka S_n priklauso nuo to, kaip tuos stačiakampius brėžiame. Tačiau visų tokių sekų riba yra ta pati.

Taigi skaičiuodami kreivinės trapecijos plotą galime nagrinėti figūras, sudarytas iš siaurų stačiakampių, ir skaičiuoti šių figūrų plotų sekos ribą.

PAVYZDYS. Apskaičiuokime plotą figūros, kurią riboja tiesės $y = 0, x = 0, x = 2$ ir funkcijos $f(x) = 1 + x$ grafikas.



Žinoma, kam lygus šios figūros plotas galime pasakyti vos žvilgterėję į brėžinį. Juk figūra — paprasčiausia trapecija! Žinodami atsakymą, galėsime patikrinti, ar gerai „veikia“ naujasis plotų skaičiavimo būdas.
Padalykime intervalą [0; 2] taškais

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, x_2 = 2 \cdot \Delta x, \ldots, x_n = n \cdot \Delta x \quad \left(\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}\right)$$

į n lygių dalių ir nubrėžkime siauruosius stačiakampius. Šių stačiakampių plotai yra

$$f(x_1) \cdot \Delta x = f(\Delta x) \cdot \Delta x = (1 + \Delta x) \cdot \Delta x = \Delta x + (\Delta x)^2,$$
$$f(x_2) \cdot \Delta x = (1 + 2\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta x + 2 \cdot (\Delta x)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f(x_n) \cdot \Delta x = \Delta x + n \cdot (\Delta x)^2,$$

o plotų suma lygi

$$S_n = n \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 2 \cdot (\Delta x)^2 + \cdots + n \cdot (\Delta x)^2 =$$
$$= n \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot (1 + 2 + \cdots + n) = 2 + (\Delta x)^2 \cdot \frac{(n+1)n}{2} =$$
$$= 2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{(n+1)n}{2} = 2 + 2 \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Taigi trapecijos plotas

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 2 + 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 2 + 2 \cdot 1 = 4.$$

Tą patį atsakymą gauname ir iš trapecijos ploto formulės. Taigi naujasis metodas „veikia“!

9.2. Apibrėžtinis integralas

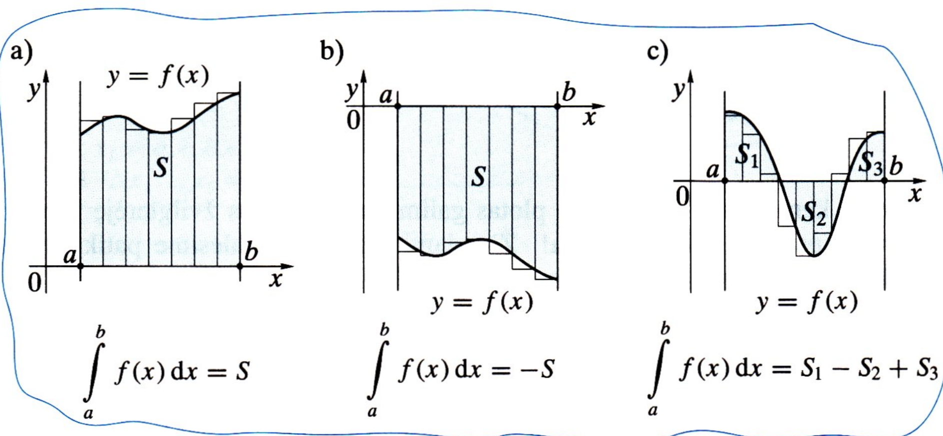
Tegu $f(x)$ yra tolydi intervale $[a; b]$ funkcija. Nagrinėkime figūrą, kurią koordinačių plokštumoje apriboja tiesės

$$y = 0, \quad x = a, \quad x = b \quad (a < b)$$

ir funkcijos

$$y = f(x)$$

grafikas. Jeigu funkcija įgyja tik neneigiamas reikšmes, gausime figūrą virš Ox ašies. Tai kreivinė trapecija. Jeigu funkcija įgyja tik neteigiamas reikšmes — figūra bus po Ox ašimi. Jeigu funkcija $f(x)$ įgyja ir teigiamas, ir neigiamas reikšmes, figūra bus sudaryta iš dalių — vienos jų bus virš Ox ašies, kitos — po ja.



Intervalą $[a; b]$ vėl padalykime taškais

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2 \cdot \Delta x, \ldots, x_n = a + n \cdot \Delta x \qquad \left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$$

į n lygių dalių ir nubrėžkime stačiakampius, kaip parodyta brėžiniuose. Jei funkcija įgyja tiek teigiamas, tiek ir neigiamas reikšmes, tai dalis stačiakampių yra virš Ox ašies, dalis — po ja.

Sudarykime sumą kaip skaičiuodami kreivinės trapecijos plotą:

$$S_n = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_n) \cdot \Delta x.$$

Jeigu funkcija įgyja tiek teigiamas, tiek ir neigiamas reikšmes, tai šioje sumoje bus ir teigiamų, ir neigiamų narių. Teigiamų narių suma bus lygi stačiakampių, esančių virš Ox ašies, plotų sumai, o neigiamų — stačiakampių, esančių po Ox ašimi, plotų sumai paimtai su minuso ženklu.

Kai n neaprėžtai didinsime, tai S_n artės prie algebrinės plotų sumos: figūros dalių, esančių virš Ox ašies, plotai į šią sumą įeis su pliuso, o figūros dalių, esančių po Ox ašimi, plotai — su minuso ženklu. Sekos S_n ribą, kai $n \to \infty$, vadinsime funkcijos $f(x)$ apibrėžtiniu integralu intervale $[a; b]$.

APIBRĖŽIMAS

Tolydžios intervale $[a; b]$ funkcijos $f(x)$ apibrėžtiniu integralu intervale $[a; b]$ vadinsime dydžių

$$S_n = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x,$$

$$\left(\Delta x = \frac{b-a}{n},\quad x_k = a + k\Delta x,\quad k = 1,\ldots,n\right)$$

sekos ribą, kai $n \to \infty$.
Apibrėžtinį integralą žymėsime

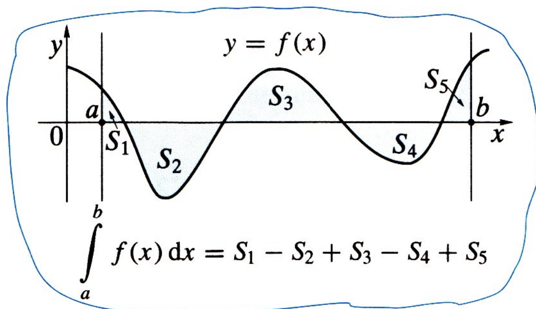
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Skaičius a, b vadinsime integralo rėžiais: a — apatiniu, b — viršutiniu, o funkciją $f(x)$ — pointegraline funkcija.

Taigi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Šis integralas lygus figūros, kurią koordinačių plokštumoje apriboja tiesės $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ir funkcijos $y = f(x)$ grafikas, dalių plotų algebrinei sumai: tų dalių, kurios yra virš Ox ašies, plotai į sumą įeina su pliuso, kurios yra po Ox ašimi — su minuso ženklu.



1 užduotis. Nubraižę funkcijos $y = f(x)$ grafiką, apskaičiuokite $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kai:

a) $a = 0,\ b = 3,\ f(x) = 1 - x$;
b) $a = -1,\ b = 1,\ f(x) = x^3$;
c) $a = -2,\ b = 2,\ f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Įrodysime vieną apibrėžtinio integralo savybę.

TEOREMA

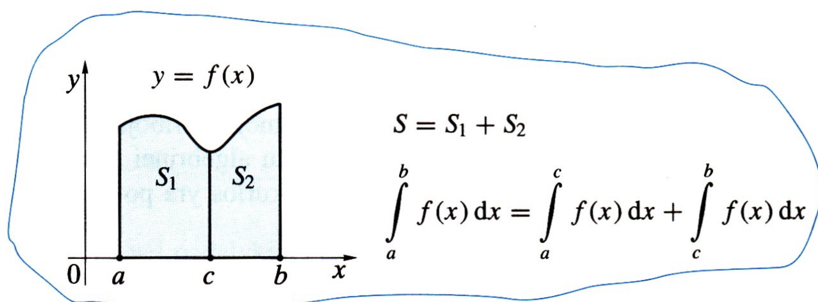
Jei funkcija $f(x)$ tolydi intervale $[a; b]$ ir c yra šio intervalo taškas, tai

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Įrodymas. Paprastumo dėlei tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ įgyja tik neneigiamas reikšmes. Tada figūra, apribota tiesėmis $y = 0, x = a, x = b$ ir funkcijos $y = f(x)$ grafiku, yra kreivinė trapecija. Šios figūros plotas

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Pasirinkime skaičių c iš intervalo $[a; b]$ ir nubrėžkime tiesę $x = c$. Ši tiesė dalija kreivinę trapeciją į dvi mažesnes.



Šių kreivinių trapecijų plotai

$$S_1 = \int_a^c f(x)\,dx, \quad S_2 = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Kita vertus, $S = S_1 + S_2$. Taigi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Tokia lygybė teisinga visoms tolydžioms funkcijoms, ne tik toms, kurios įgyja neneigiamas reikšmes.

Pratimai ir uždaviniai

16. Koordinačių plokštumoje pavaizduokite figūrą, apribotą nurodytomis tiesėmis ir kreivėmis:
a) $y = 0,\ y = 2 - x,\ x = 0,\ x = 1;$
b) $y = 0,\ y = 2 - x^2,\ x = -1,\ x = 1;$
c) $y = -2,\ y = \sin x,\ x = -\pi,\ x = \pi;$
d) $y = x^2,\ y = 1 - x^2;$
e) $y = 0,\ y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 4;$
f) $y = \mathrm{e}^x,\ y = \mathrm{e}^x + 1,\ x = -1,\ x = 1.$

17. Pavaizduokite figūrą, kurios plotas užrašomas integralu:

a) $\int_{-1}^{1} (1 + x^3)\,\mathrm{d}x;$ b) $\int_{1}^{3} (x - 2)^2\,\mathrm{d}x;$
c) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x};$ d) $\int_{-1}^{3} \sqrt{x + 1}\,\mathrm{d}x;$
e) $\int_{-2}^{3} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x;$ f) $\int_{-2}^{2} 2^x\,\mathrm{d}x;$
g) $\int_{0}^{1} \sin \pi x\,\mathrm{d}x;$ h) $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + 1)\,\mathrm{d}x.$

18. Nusibraižę funkcijos $f(x)$ grafiką, suraskite integralo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ reikšmę:

a) $f(x) = x,\ a = 0,\ b = 2;$ b) $f(x) = x,\ a = -1,\ b = 1;$
c) $f(x) = \sin x,\ a = -\pi,\ b = \pi;$ d) $f(x) = \cos x,\ a = 0,\ b = \pi;$
e) $f(x) = \mathrm{tg} x,\ a = -\frac{\pi}{4},\ b = \frac{\pi}{4}.$

19. Taškais $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ padaliję nurodytą intervalą į keturis to paties ilgio Δx intervalus, apskaičiuokite sumą $S_4 = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$, kai:

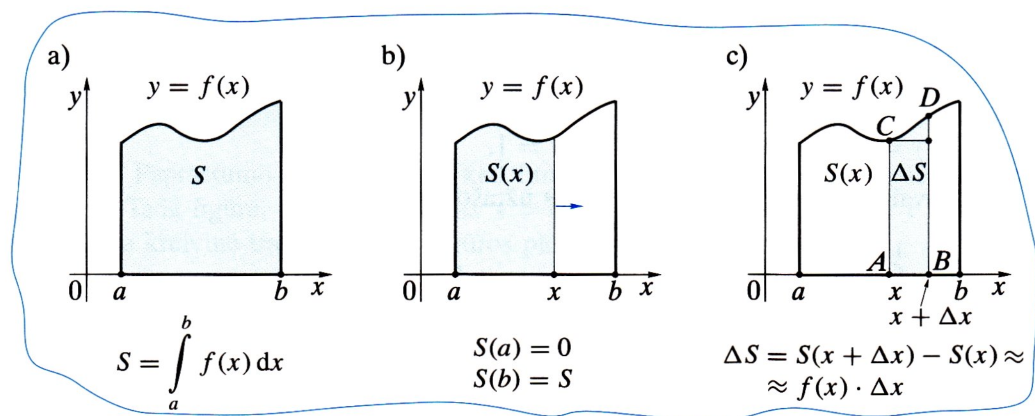
a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2,\ x \in [0; 4];$ b) $f(x) = -x(x + 1),\ x \in [-1; 0];$
c) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2},\ x \in [-1; 2];$ d) $f(x) = \frac{x}{x+1},\ x \in [0; 2].$

Pavaizduokite funkciją $f(x)$ ir laiptuotą figūrą, kurios plotą radote.

20. Apskaičiuokite figūros, apribotos nurodytomis tiesėmis, plotą dviem būdais: taikydami žinomas geometrijos formules ir ieškodami atitinkamų laiptuotų figūrų plotų ribos:
a) $y = 0,\ y = 2x + 3,\ x = 1,\ x = 3;$
b) $y = 0,\ y = 3 - x,\ x = -1,\ x = 2;$
c) $y = 0,\ y = 3x,\ x = 2;$
d) $y = 0,\ y = 2 + \frac{1}{2}x,\ x = 0,\ x = 6.$

9.3. Niutono ir Leibnico formulė

Nagrinėsime kreivinę trapeciją, kurią koordinačių plokštumoje apriboja tiesės $y = 0$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ ir tolydžios, įgyjančios tik neneigiamas reikšmes funkcijos $f(x)$ grafikas.



Kreivinės trapecijos plotą S (žr. a) pav.) galime užrašyti apibrėžtiniu integralu

$$S = \int_a^b f(x)\,dx,$$

tačiau po to skaičiuoti plotą netaps lengviau. Sumuoti mažų stačiakampių plotus ir skaičiuoti gautų sumų ribą — sunkus uždavinys! Šiame skyriuje išmoksime apskaičiuoti kreivinės trapecijos plotą kitaip.

Įsivaizduokime, kad per tašką $x = a$ statmenai Ox ašiai nubrėžtos dvi tiesės: iš pradžių jos sutampa, o paskui — viena lieka vietoje, o kita, likdama statmena Ox ašiai, slenka į dešinę. Šios dvi tiesės kartu su tiese $y = 0$ ir funkcijos $f(x)$ grafiku koordinačių plokštumoje apriboja kreivinę trapeciją, kuri vis „plečiasi“, kai viena tiesė slenka į dešinę. Pažymėkime $S(x)$ šios kreivinės trapecijos plotą, kai antroji tiesė kerta Ox ašį taške x (žr. b) pav.). Tada $S(x)$ yra nemažėjanti funkcija, įgyjanti neneigiamas reikšmes. Kai $x = a$, $S(x)$ reiškia plotą figūros, apribotos funkcijos $f(x)$ grafiku, tiese $y = 0$ ir dviem sutampančiom tiesėm $(x = a)$. Aišku, kad šis plotas lygus nuliui, taigi $S(a) = 0$. Kai $x = b$, tai $S(b) = S$.

Įsitikinsime, kad visiems x iš intervalo $(a; b)$ teisinga lygybė $S'(x) = f(x)$.

Panagrinėkime, kaip pasikeitė kreivinės trapecijos plotas, kai judanti tiesė pasislinko į dešinę per Δx (žr. c) brėžinį). Matome, kad plotas padidėjo dydžiu

$$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x).$$

Šis ploto pokytis lygus plotui kreivinės trapecijos su pagrindu AB, iš viršaus apribotos funkcijos $f(x)$ grafiku. Kai Δx yra mažas, šios trapecijos plotas mažai skiriasi nuo

ploto stačiakampio, kurio viena kraštinė lygi Δx, o kita — $f(x)$, t. y.

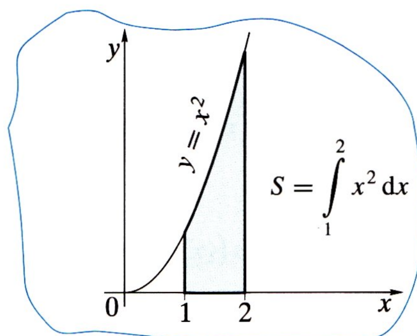
$$S(x+\Delta x) - S(x) \approx \Delta x \cdot f(x) \quad \text{arba} \quad \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \approx f(x).$$

Kuo dydis Δx mažesnis, tuo ši apytikslė lygybė tikslesnė. Kai Δx artėja prie nulio, pokyčių santykis artėja prie $f(x)$, t. y.:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x) \quad \text{arba} \quad S'(x) = f(x).$$

Taigi kreivinės trapecijos ploto $S(x)$ funkcija yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė! Vadinasi, norint surasti plotą kreivinės trapecijos, apribotos funkcijos $y = f(x)$ grafiku, reikia rasti šios funkcijos pirmykštę.

1 PAVYZDYS. Raskime plotą kreivinės trapecijos, kurią koordinačių plokštumoje riboja tiesės $y = 0, x = 1, x = 2$ ir funkcijos $f(x) = x^2$ grafikas:



Pažymėkime $S(x)$ plotą kreivinės trapecijos, kurią riboja tiesės $y = 0, x = 1$, funkcijos $f(x) = x^2$ grafikas ir tiesė, statmena tiesei $y = 0$ bei kertanti Ox ašį taške x. Jau žinome, kad $S(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė, t. y. $S'(x) = x^2$. Tačiau vieną funkcijos $f(x) = x^2$ pirmykštę žinome — tai funkcija $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Tada

$$S(x) = F(x) + C = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Surasime dydžio C reikšmę. Kai $x = 1$, tai $S(1)$ reiškia plotą figūros, kurią apriboja tiesė $y = 0$, funkcijos $f(x) = x^2$ grafikas ir dvi sutampančios tiesės ($x = 1$). Taigi $S(1) = 0$. Į lygybę $S(x) = F(x) + C$ įstatę $x = 1$, gauname $0 = F(1) + C$ ir $C = -F(1)$. Taigi

$$S(x) = F(x) - F(1) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{1}{3}(x^3 - 1).$$

Jei $x = 2$, tai $S(2)$ reiškia ieškomą kreivinės trapecijos plotą:

$$\int_1^2 x^2\,dx = F(2) - F(1) = \frac{1}{3}(2^3 - 1) = \frac{7}{3}.$$

Apibrėžtiniam integralui apskaičiuoti pakako surasti vieną pointegralinės funkcijos pirmykštę funkciją.
Šitaip skaičiuojami apibrėžtiniai integralai ir kitų tolydžių funkcijų, įgyjančių tiek teigiamas, tiek neigiamas reikšmes.

TEOREMA
Jeigu funkcija $f(x)$ yra tolydi intervale $[a; b]$ $(a < b)$, o funkcija $F(x)$ yra jos pirmykštė, tai

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

(Ši formulė vadinama Niutono ir Leibnico formule.)

Dažnai, kad būtų trumpiau, skirtumas $F(b) - F(a)$ žymimas $F(x)|_a^b$. Naudojant šį žymenį Niutono ir Leibnico formulę galime užrašyti taip:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$$

2 PAVYZDYS. Apskaičiuokime integralą

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Kadangi funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ pirmykštė yra funkcija

$$F(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},$$

tai

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

1 užduotis. Apskaičiuokite integralus $\int\limits_{-2}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Pasinaudojus Niutono ir Leibnico formule nesunku įrodyti tokias apibrėžtinio integralo savybes:

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

čia $f(x)$ ir $g(x)$ yra tolydžios intervale $[a; b]$ funkcijos, o k — skaičius.

Įrodykime pirmąją savybę. Jei $F(x)$ ir $G(x)$ yra funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ pirmykštės, tai funkcija $F(x)+G(x)$ yra funkcijos $f(x)+g(x)$ pirmykštė. Tada pasirėmę Niutono ir Leibnico formule gausime:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b, \qquad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = G(x)\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \big(F(x)+G(x)\big)\Big|_a^b.$$

Tačiau

$$F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a), \qquad G(x)\Big|_a^b = G(b)-G(a),$$

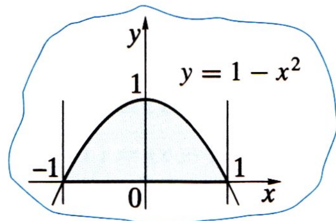
$$\big(F(x)+G(x)\big)\Big|_a^b = F(b)+G(b)-F(a)-G(a).$$

Lengva patikrinti, kad $(F(x)+G(x))|_a^b = F(x)|_a^b + G(x)|_a^b$, taigi ir

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2 užduotis. Pasinaudokite Niutono ir Leibnico formule ir įrodykite antrąją savybę.

3 PAVYZDYS. Apskaičiuokime plotą figūros, kurią koordinačių plokštumoje apriboja Ox ašis ir funkcijos $y = 1 - x^2$ grafikas.



Figūrą, kurios plotą reikia apskaičiuoti, galime laikyti kreivine trapecija, kurią apriboja tiesės $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$ ir funkcijos $y = 1 - x^2$ grafikas. Taigi ieškomas plotas

$$S = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x.$$

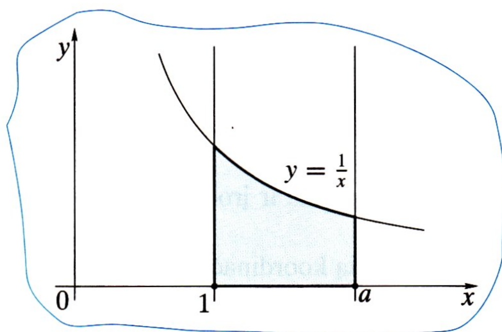
Naudodamiesi apibrėžtinio integralo savybėmis, gauname:

$$S = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = x\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1) - \frac{1}{3}\big(1^3 - (-1)^3\big) =$$
$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Žinoma, ieškomą plotą galime rasti ir kitaip: apskaičiavę plotą kreivinės trapecijos, apribotos tiesėmis $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ ir funkcijos $y = 1 - x^2$ grafiku ir jį padvigubinę.
Taigi

$$S = 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}x - 2\int_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = 2x\Big|_0^1 - 2\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

4 PAVYZDYS. Raskime tokį skaičių a ($a > 1$), kad plotas kreivinės trapecijos, apribotos tiesėmis $y = 0$, $x = 1$, $x = a$ ir funkcijos $y = \frac{1}{x}$ grafiku, būtų lygus 1. Pažymėkime brėžinyje užtušuotą plotą S.



Taigi

$$S = \int_{1}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_1^a = \ln a - \ln 1 = \ln a.$$

Šis plotas lygus 1, t. y.

$$S = 1, \quad \text{kai } \ln a = 1 \text{ arba } a = \mathrm{e}.$$

Taigi ieškomas skaičius — mūsų gerai pažįstamas skaičius $\mathrm{e} \approx 2{,}718\ldots$

Pratimai ir uždaviniai

21. Apskaičiuokite integralą. Brėžinyje pavaizduokite figūrą, kurios plotą tas integralas išreiškia:

a) $\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x$; b) $\int_2^4 x^3\,\mathrm{d}x$; c) $\int_0^4 x^3\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$; e) $\int_0^4 (\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x$; f) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$;

g) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$; h) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$; i) $\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.

22. Apskaičiuokite integralą:

a) $\int_{-1}^{1} (3x^2 - x)\,\mathrm{d}x$; b) $\int_1^2 x^2(x+1)\,\mathrm{d}x$; c) $\int_0^1 (x\sqrt[3]{x}+1)\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; f) $\int_0^1 \mathrm{e}^{x+2}\,\mathrm{d}x$.

23. Apskaičiuokite integralą:

a) $\int_1^2 (x-1)^5\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^5}$; c) $\int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$;

d) $\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$; e) $\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$; f) $\int_{-\frac{1}{4}}^{0} \cos \pi x\,\mathrm{d}x$.

24. Raskite plotą kreivinės trapecijos, apribotos funkcijos $f(x)$ grafiku, Ox ašimi ir nurodyta tiese. Nubraižykite brėžinį:

a) $f(x) = (x-1)^2$, $x = 2$; b) $f(x) = x^3 - 1$, $x = 2$;

c) $f(x) = (x-2)^3$, $x = 3$; d) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $x = 9$;

e) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $x = 1$; f) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$, $x = 1$.

25. Raskite plotą figūros, apribotos funkcijos $f(x)$ grafiku ir Ox ašimi. Nubraižykite brėžinį:

a) $f(x) = x(x+1)$;
b) $f(x) = x^2 - 8x + 12$;
c) $f(x) = 2x - x^2$;
d) $f(x) = x^2 + 2x - 3$;
e) $f(x) = 1 - (x-1)^4$;
f) $f(x) = (x-2)^4 - 16$.

26. Kūnas juda tiese. Raskite kūno nueitą kelią per laikotarpį $[t_1; t_2]$, kai jo greitį nusako funkcija $v(t)$ m/s:

a) $v(t) = 2t + 2$, $t_1 = 0$, $t_2 = 10$;
b) $v(t) = \sqrt{t}$, $t_1 = 1$, $t_2 = 9$;
c) $f(x) = e^t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 3\ln 10$;
d) $v(t) = \sin t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Kaip galėtumėte apibūdinti greičio kitimą? Kaip kistų kūno padėtis, laikui neaprėžtai didėjant?

27. Bakterijų skaičiaus tam tikroje terpėje kitimo greitį apytiksliai nusako funkcija

$$m(t) = 10^4 \cdot e^{1,03t},$$

čia t — laikas, matuojamas valandomis. Kaip pakito bakterijų skaičius per 24 valandas nuo stebėjimo pradžios? Apytikslį atsakymą užrašykite standartiniu pavidalu.

Apibrėžtinio integralo žymenį $\int_a^b f(x)\,dx$ *sugalvojo G. V. Leibnicas. Šis žymuo gerai primena integralo apibrėžimą:*

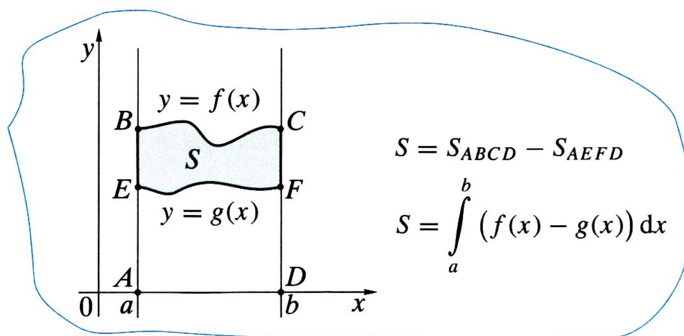
- $f(x)\,dx$ *primena dydžius* $f(x)\,\Delta x$;
- $\int$ *yra išstypusi raidė S (žodžio „Suma“ pirmoji raidė); ji primena, kad skaičiuojant integralą pagal apibrėžimą dydžiai* $f(x)\,\Delta x$ *sumuojami, o sumos „ilginamos“ imant vis daugiau narių;*
- *skaičiai a, b primena intervalą* $[a; b]$, *kuriame vyksta visas veiksmas.*

9.4. Figūrų plotai

Kreivinės trapecijos, apribotos tiesėmis $y = 0, x = a, x = b$ $(a < b)$ ir tolydžios funkcijos $f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$ grafiku, plotas reiškiamas apibrėžtiniu integralu

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Apibrėžtiniais integralais reiškiami ir sudėtingesnių figūrų plotai.
Panagrinėkime figūrą, kurią koordinačių plokštumoje apriboja tiesės $x = a$, $x = b$ ir dviejų tolydžiųjų funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ $(f(x) \geqslant g(x), g(x) \geqslant 0)$ grafikai, žr. brėžinį.



Šios figūros plotas S lygus dviejų kreivinių trapecijų plotų skirtumui:

$$S = S_{ABCD} - S_{AEFD}.$$

Kreivinių trapecijų plotai reiškiami apibrėžtiniais integralais:

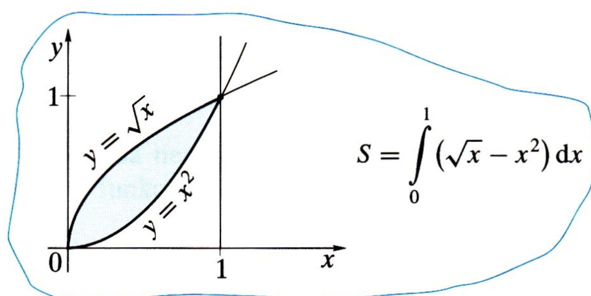
$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$S_{AEFD} = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Taigi

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime plotą figūros, kurią riboja funkcijų $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ grafikai ir tiesės $x = 0$, $x = 1$.



Remdamiesi ploto formule, gauname:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx.$$

Funkcijos $h(x) = \sqrt{x} - x^2$ pirmykštė yra funkcija

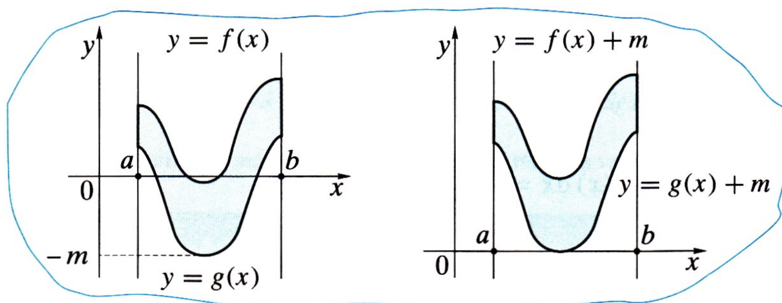
$$H(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} x^{1+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^3 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3.$$

Taigi

$$S = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

1 užduotis. Apskaičiuokite plotą figūros, kurią riboja funkcijų $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ grafikai ir tiesės $x = 0$, $x = 1$.

Tegu dabar $f(x)$ ir $g(x)$ yra dvi tolydžios funkcijos ($f(x) \geqslant g(x)$), galinčios įgyti ir teigiamas, ir neigiamas reikšmes. Šių funkcijų grafikai ir tiesės $x = a$, $x = b$ ($a < b$) koordinačių plokštumoje apriboja figūrą, kurios viena dalis yra virš, o kita — po Ox ašimi.



Įsitikinsime, kad šios figūros plotą galime skaičiuoti naudodamiesi ta pačia formule, kaip ir tuo atveju, kai abi funkcijos įgyja tik neneigiamas reikšmes.

Tarkime, kad mažiausioji funkcijos $g(x)$ reikšmė intervale $[a; b]$ lygi $-m$ $(m > 0)$. Nagrinėkime funkcijas $f_1(x) = f(x) + m$, $g_1(x) = g(x) + m$, įgyjančias tik neneigiamas reikšmes. Šių funkcijų grafikus galime gauti iš funkcijų $f(x)$, $g(x)$ grafikų, pastūmę pastaruosius į viršų per m. Pastumtieji grafikai ir tiesės $x = a$, $x = b$ koordinačių plokštumoje apriboja tokio pat ploto figūrą, kaip ir funkcijų $f(x)$, $g(x)$ grafikai bei tiesės $x = a$, $x = b$. Taigi šios figūros plotas

$$S = \int_a^b \big(f_1(x) - g_1(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x) + m - g(x) - m\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Figūros, kurią koordinačių plokštumoje apriboja funkcijų $f(x)$, $g(x)$ $(g(x) \leqslant f(x))$ grafikai ir tiesės $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, plotas

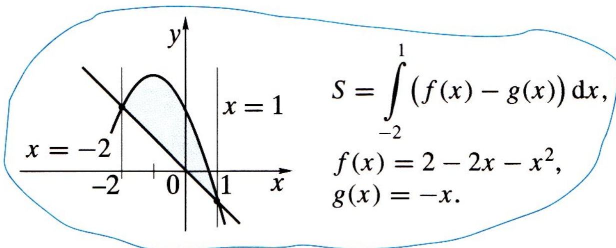
$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

2 PAVYZDYS. Apskaičiuokime plotą figūros, kurią koordinačių plokštumoje apriboja funkcijų $y = -x$, $y = 2 - 2x - x^2$ grafikai.

Visų pirma raskime abiejų grafikų susikirtimo taškus:

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = 2 - 2x - x^2, \end{cases} \qquad -x = 2 - 2x - x^2, \qquad x^2 + x - 2 = 0.$$

Išsprendę šią lygtį gauname $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Tada $y_1 = -1$, $y_2 = 2$. Taigi grafikai kertasi taškuose $(-2; 2)$ ir $(1; -1)$.



Galime laikyti, kad figūrą apriboja tiesės $x = -2$, $x = 1$ ir funkcijų $f(x) = 2-2x-x^2$, $g(x) = -x$ grafikai.

Jos plotą S skaičiuosime integruodami:

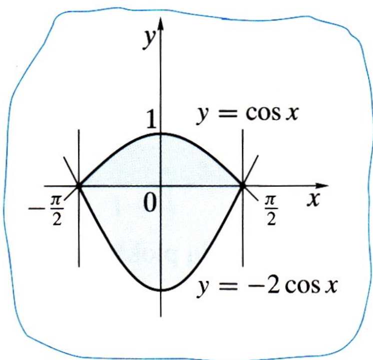
$$S = \int_{-2}^{1} \big((2 - 2x - x^2) - (-x)\big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = 4\frac{1}{2}.$$

3 PAVYZDYS. Apskaičiuokime plotą figūros, kurią koordinačių plokštumoje apriboja funkcijų

$$y = \cos x, \qquad y = -2\cos x$$

grafikai, kai $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.



Nors figūra yra gana sudėtinga, suskaičiuoti jos plotą integruojant visai nesunku:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos x - (-2\cos x)\big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = 3\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\big(1 - (-1)\big) = 6.$$

Pratimai ir uždaviniai

28. Raskite plotą figūros, kurią riboja funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai bei nurodytos tiesės:

a) $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x - 2$, $x = 0$, $x = 2$;

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$, $x = -1$, $x = 1$;

c) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = -x - 2$, $x = -1$, $x = 1$;

d) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -\sqrt{x}$, $x = 4$;

e) $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = -\mathrm{e}^x$, $x = 0$, $x = 1$;

f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$.

29. Raskite plotą figūros, apribotos abscisių ašimi, funkcijos $f(x)$ grafiku ir nurodyta tiese:

a) $f(x) = x^2 - 1$, $x = 2$;

b) $f(x) = x^3$, $x = 2$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$;

d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$, $x = 2$.

30. Raskite plotą figūros, apribotos funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikais:

a) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$;

b) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3 - x$;

c) $f(x) = (x + 2)^2$, $g(x) = x + 2$;

d) $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $g(x) = 4 - x$;

e) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 2x - 5$;

f) $f(x) = x^2$, $g(x) = 0{,}5x^2 + 2$.

31. Raskite plotą figūros, apribotos funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikais:

a) $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = \sin x$, $x \in [-\pi; \pi]$;

b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

32. Funkcijos $f(x)$ grafikas kvadratą $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ dalija į dvi dalis. Raskite tų dalių plotus, kai:

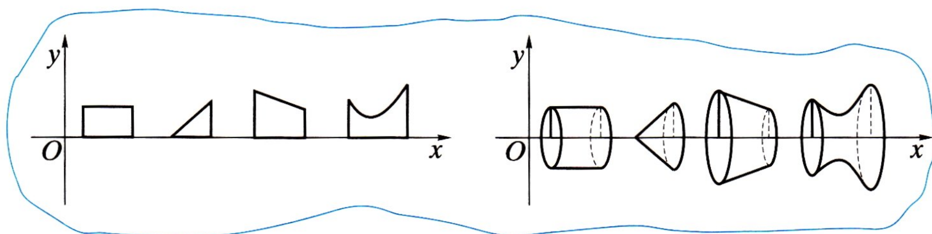
a) $f(x) = x^2$;

b) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

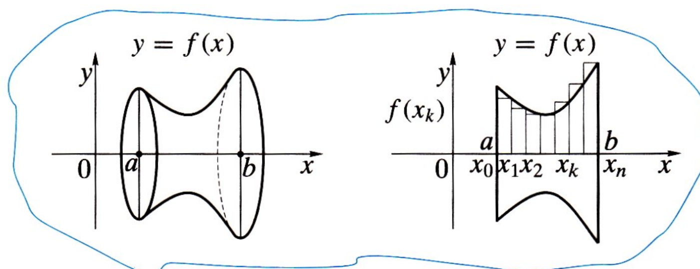
33. Raskite plotą figūros, apribotos kreive $y = x^2 + 1$ ir jos liestinėmis, nubrėžtomis taškuose $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$.

9.5. Sukinių tūriai

Koordinačių plokštumoje ant Ox ašies nubraižytos kelios figūros: stačiakampis, trikampis, paprastoji ir kreivinė trapecijos.



Jeigu šias figūras suksime apie Ox ašį, gausime kūnus, kurie vadinami sukiniais. Sukdami stačiakampį gausime ritinį, sukdami trikampį ir trapeciją — kūgį ir nupjautinį kūgį. Sukant kreivines trapecijas gaunamų kūnų forma priklauso nuo kreivinę trapeciją apribojančio funkcijos $f(x)$ grafiko.
Nors sukiniai yra labai įvairūs, viena savybė bendra jiems visiems: kirsdami sukinį plokštuma, statmena sukimosi ašiai, pjūvyje gauname skritulį.
Išmoksime apskaičiuoti sukinių tūrius.
Tarkime, sukinys gautas sukant apie Ox ašį kreivinę trapeciją, kurią koordinačių plokštumoje apriboja tiesės $y = 0, x = a, x = b$ ir funkcijos $y = f(x)$ grafikas ($a < b,\ f(x) \geqslant 0$).



Padalykime intervalą $[a; b]$ taškais $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ į n ($n > 1$) lygių dalių:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_n = a + n\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Nubrėžkime stačiakampius su pagrindais intervaluose $[x_{k-1}; x_k]$. Taip darėme ir skaičiuodami kreivinės trapecijos plotą. Kraštinių, statmenų Ox ašiai, ilgiai lygūs $f(x_k)$. Jeigu vieną tokį stačiakampį suksime apie Ox ašį, tai gausime ritinį, kurio pagrindo spindulio ilgis lygus $f(x_k)$, o aukštinės ilgis — Δx. Tokio ritinio tūris lygus $\pi f^2(x_k)\Delta x$.
Jeigu apie Ox ašį suksime visą iš stačiakampių sudarytą figūrą, gausime iš ritinių sudarytą kūną. Tokio kūno tūrį V_n gausime, sudėję mažųjų ritinių tūrius:

$$V_n = \pi f^2(x_1) \cdot \Delta x + \pi f^2(x_2) \cdot \Delta x + \cdots + \pi f^2(x_n) \cdot \Delta x.$$

Kuo didesnis n, tuo V_n mažiau skiriasi nuo tūrio sukinio, gauto sukant kreivinę trapeciją. Taigi sukinio tūris V lygus ribai

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n, \quad V_n = \pi f^2(x_1)\cdot\Delta x + \pi f^2(x_2)\cdot\Delta x + \cdots + \pi f^2(x_n)\cdot\Delta x,$$

čia $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k\Delta x$, $k = 1, \ldots, n$.

Tačiau tai pačiai ribai lygus apibrėžtinis integralas $\int\limits_a^b \pi f^2(x)\,dx$.

Taigi gavome tokį teiginį.

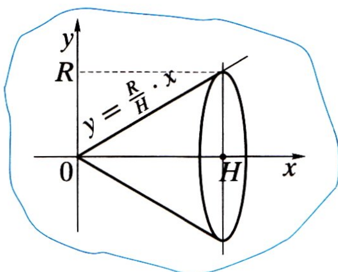
TEOREMA

Sukinio, kurį gauname apie Ox ašį sukdami kreivinę trapeciją, apribotą tiesėmis $y = 0, x = a, x = b$ $(a < b)$ ir tolydžios funkcijos $f(x)$ grafiku, tūris

$$V = \int\limits_a^b \pi f^2(x)\,dx.$$

1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime tūrį kūgio, kurio pagrindo spindulys lygus R, o aukštinė yra H.

Tokį kūgį gausime sukdami apie Ox ašį statųjį trikampį, kurio statiniai lygūs H ir R (žr. brėžinį).



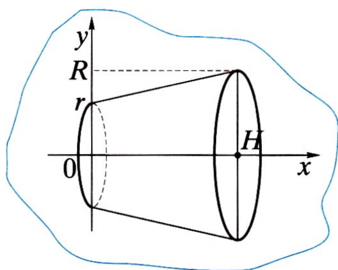
Statusis trikampis yra figūra, apribota tiesėmis $y = 0, x = 0, x = H$ ir dar viena tiese — funkcijos $f(x) = \frac{R}{H}x$ grafiku. Taigi kūgio tūris

$$V = \int\limits_0^H \pi\left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi\frac{R^2}{H^2}\int\limits_0^H x^2\,dx = \pi\frac{R^2}{H^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^H,$$

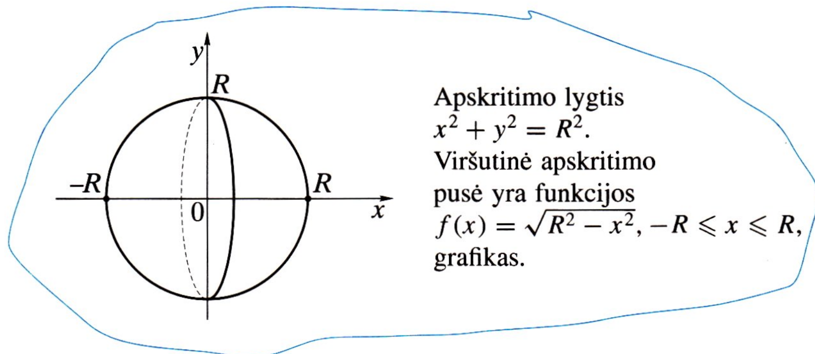
$$\boxed{V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H}$$

1 užduotis. Įrodykite, kad tūris nupjautinio kūgio, kurio pagrindų spinduliai lygūs r ir R, o aukštinė yra H, skaičiuojamas pagal formulę

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2)H.$$



2 PAVYZDYS. Apskaičiuokime tūrį rutulio, kurio spindulys lygus R. Rutulys yra sukinys, kurį gauname, sukdami apie Ox ašį pusę skritulio.



Pusė skritulio yra figūra, kurią koordinačių plokštumoje apriboja tiesė $y = 0$ ir apskritimo lankas. Šis apskritimo lankas yra funkcijos $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \leqslant x \leqslant R)$ grafikas. Todėl rutulio tūrį skaičiuojame taip:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^{R} R^2\,\mathrm{d}x - \pi \int_{-R}^{R} x^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \pi R^2 \int_{-R}^{R} 1 \cdot \mathrm{d}x - \pi \int_{-R}^{R} x^2\,\mathrm{d}x = \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi}{3} x^3 \Big|_{-R}^{R}.$$

Apskaičiavę gauname, kad rutulio tūris reiškiamas formule

$$\boxed{V = \tfrac{4}{3}\pi R^3}$$

Pratimai ir uždaviniai

34. Pavaizduokite kūną, kurio tūris užrašomas integralu:

a) $\pi \int\limits_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$;   b) $\int\limits_0^1 (x-1)^4\,\mathrm{d}x$;

c) $\pi \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x$;   d) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

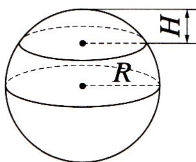
35. Raskite tūrį sukinio, gauto sukant apie abscisių ašį kreivinę trapeciją, apribotą nurodyta kreive ir tiesėmis:
a) $y = x^2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$;
b) $y = 1 + x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$;
c) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$;
d) $y = \frac{2}{x}$, $x = 3$, $x = 12$, $y = 0$;
e) $y = \sqrt{\sin x}$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$;
f) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$.

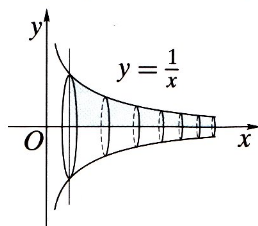
36. Raskite tūrį sukinio, gauto sukant apie abscisių ašį figūrą, apribotą kreivėmis:

a) $y = x^2$, $y = x^3$;   b) $y = x^3$, $y = x$;

c) $y = x^2$, $y = 2 - x$;   d) $y = 1 - x^2$, $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$.

37. Raskite rutulio nuopjovos tūrį, kai nuopjovos aukštinė H, o rutulio spindulys R.





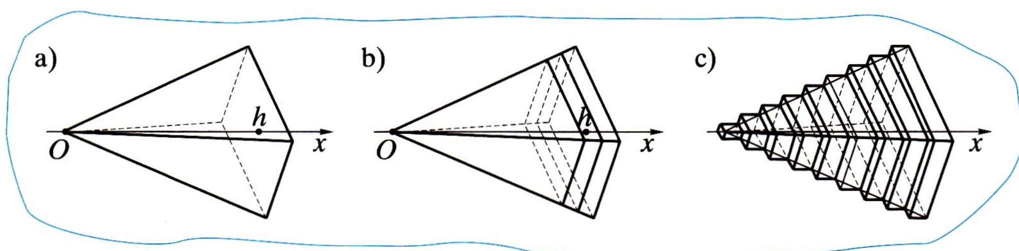
Gamtoje visi kūnai baigtiniai, tačiau matematikoje ir begalinius kūnus lengva „sukurti“. Iš tiesų, įsivaizduokime, kad figūrą, apribotą tiesėmis $y = 0$, $x = 1$ ir funkcijos $y = \frac{1}{x}$ grafiku, sukame apie Ox ašį. Gausime begalinį, tolstantį Ox ašimi, vis siaurėjantį piltuvą. Ar šio begalinio kūno ir tūris yra begalinis? Italų matematikas E. Toričelis apskaičiavo ir nustatė, kad jis baigtinis. Tai buvo stebėtinas dalykas. Laiške Toričeliui B. Kavaljeris parašė: „Negaliu suvokti, kaip Jums taip lengvai pavyko nugramzdinti matuoklę į begalines šio kūno gelmes“.

9.6. Piramidės tūris

Piramidės tūrį skaičiuojame naudodamiesi paprasta formule

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h,$$

čia S — piramidės pagrindo plotas, h — aukštinės ilgis.
Gali atrodyti, kad tokios paprastos formulės įrodymas irgi turėtų būti paprastas. Tačiau taip nėra. Įrodysime šią formulę pasinaudoję integralais.
Nagrinėkime piramidę, kurios pagrindo plotas lygus S, o aukštinės ilgis yra h. Per piramidės viršūnę O statmenai pagrindui nubrėžkime skaičių tiesę. Nulį priskirkime piramidės viršūnei O.



Tiesės atkarpa tarp piramidės viršūnės ir pagrindo sutampa su piramidės aukštine. Padalykime šią atkarpą taškais $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ į n lygių dalių:

$$\Delta x = \frac{h}{n}, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2 \cdot \Delta x, \quad \ldots, \quad x_n = n \cdot \Delta x.$$

Per taškus x_i nubrėžę plokštumas statmenas Ox ašiai, gausime piramidės pjūvius (žr. b) pav.). Šie pjūviai yra daugiakampiai, panašūs į piramidės pagrindą. Pažymėkime $S(x)$ — plotą pjūvio, gauto plokštuma, einančia per tašką x. Galima įrodyti, kad

$$\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}, \quad \text{t. y.} \quad S(x) = \frac{S}{h^2}x^2.$$

Įsivaizduokime, kad laikydami gautuosius pjūvių daugiakampius pagrindais, sukonstruojame stačiąsias prizmes, kurių aukštinės lygios Δx (žr. c) pav.). Iš šių prizmių sudaryto kūno tūrį pažymėkime V_n. Jis lygus mažųjų prizmių tūrių sumai:

$$V_n = S(x_1) \cdot \Delta x + S(x_2) \cdot \Delta x + \cdots + S(x_n) \cdot \Delta x.$$

Tūris V_n yra didesnis už piramidės tūrį V, tačiau kai n didiname, V_n artėja prie V:

$$V = \lim_{n \to \infty} V_n.$$

Ši riba lygi apibrėžtiniam integralui

$$\int_0^h S(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kadangi $S(x) = \frac{Sx^2}{h^2}$, tai įstatę po integralo ženklu, gausime:

$$V = \int_0^h \frac{Sx^2}{h^2}\,\mathrm{d}x = \frac{S}{h^2} \cdot \int_0^h x^2\,\mathrm{d}x = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{h^2} \cdot h^3 = \frac{1}{3}Sh.$$

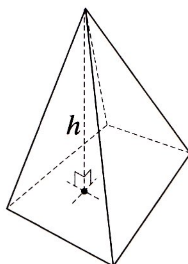
Taigi įrodėme gerai žinomą piramidės tūrio formulę

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

Užduotis. Įrodykite, kad tūrį nupjautinės piramidės, kurios aukštinė yra h, o pagrindų plotai lygūs s ir S, galima apskaičiuoti pagal formulę

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{Ss} + s\right).$$

O gal vis dėlto galima išvesti piramidės tūrio formulę paprasčiau, nesinaudojant nei ribomis, nei integralais? Juk, pavyzdžiui, trikampio ploto formulei įrodyti tokių gudrybių neprisireikia.
XX amžiaus pradžioje matematikai įrodė, kad tai neįmanoma.
Taigi piramidės yra mįslingi kūnai. Be ribų ar integralų jų nesuprasi.



$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{pagr}} \cdot h$

10. Kartojimo uždaviniai

1. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$, tenkinančią nurodytą sąlygą:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $F(1) = 7$;
b) $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $F(1) = 3$;
c) $f(x) = x + \sin 2x$, $F(0) = \frac{1}{2}$;
d) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 1$, $F(0) = 10$.

2. Užrašykite lygtį kreivės, nubrėžtos per tašką $M(2; 4)$, jei jos liestinės taške x_0 krypties koeficientas lygus $\sqrt{x_0 + 2}$.

3. Raskite funkcijos $f(x)$ visas pirmykštes funkcijas, kai:

a) $f(x) = (2x+3)^6$;
b) $f(x) = \sqrt{3x+1}$;
c) $f(x) = (3-x)^{\frac{2}{3}}$;
d) $f(x) = \frac{1}{3x-4}$;
e) $f(x) = \frac{4}{(2x-5)^3}$;
f) $f(x) = 3^{3x}$;
g) $f(x) = \sin(\pi x)$;
h) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(\pi x)}$.

4. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą:

a) $\int (2x^2 - 1)\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$;
b) $\int (3 - x^2)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;
c) $\int \frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
d) $\int (x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})^3\,\mathrm{d}x$;
e) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
f) $\int \frac{(4-\sqrt{x})^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

5. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą:

a) $\int (\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x})^2\,\mathrm{d}x$;
b) $\int (3^x + 2^x)\cdot 3^x\,\mathrm{d}x$;
c) $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$;
d) $\int \frac{32^x-2^x}{4^x}\,\mathrm{d}x$.

6. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą, prieš tai suprastinę integruojamą funkciją:

a) $\int \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x$;
b) $\int (1 - 8\sin^2 x\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$;
c) $\int \frac{2\mathrm{tg} x}{1+\mathrm{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x$;
d) $\int \frac{\mathrm{ctg}\, x-\mathrm{tg} x}{\mathrm{ctg}\, x-\mathrm{ctg}\, 2x}\,\mathrm{d}x$.

7. Kūnas juda tiese greičiu $v(t) = t^2 + 2t$ m/s. Raskite jo nueitą atstumą:
a) per 3 pirmąsias sekundes; b) per pirmąsias 6 sekundes.

8. Nustojus irkluoti 2 m/s greičiu plaukusią valtį, jos greitis toliau mažėjo pagal dėsnį

$$v(t) = 2^{1-\frac{t}{4}}, \quad t \geqslant 0.$$

a) Kokį atstumą nuplaukė neirkluojama valtis per pirmąsias 16 sekundžių?
b) Kokį didžiausią atstumą gali nuplaukti neirkluojama valtis?

9. Radioaktyviosios medžiagos masę momentu t pažymėkime $m(t)$. Tuomet jos skilimo greitį nusako funkcija

$$m'(t) = -km_0 e^{-kt},$$

čia k — skilimo konstanta, $k = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}$, $T_{\frac{1}{2}}$ — radioaktyviosios medžiagos skilimo pusamžis, m_0 — pradinė medžiagos masė, t — laikas.

a) Įsitikinkite, kad teisingas radioaktyviosios medžiagos dėsnis: skilimo greitis proporcingas dar nesuskilusios medžiagos kiekiui.

b) Apskaičiuokite, kuri pradinio radžio ^{226}Ra kiekio dalis liks po 200 metų. Radžio $T_{\frac{1}{2}} = 1590$ metų.

c) Po Černobylio atominės elektrinės avarijos (1986 m.) į pietinę ir vakarinę Lietuvos dalis vėjai atnešė daugiausia šių radioaktyviųjų izotopų:

jodo	^{131}I	$T_{\frac{1}{2}} = 8{,}4$ paros
cezio	^{137}Cs	$T_{\frac{1}{2}} = 2{,}8$ metų
stroncio	^{90}Sr	$T_{\frac{1}{2}} = 9$ minutės

Apskaičiuokite, per kiek laiko šių izotopų kiekis dėl skilimo sumažėja šimteriopai.

10. Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos nurodytomis tiesėmis ir funkcijų grafikais, ieškodami laiptuotų figūrų plotų ribos:

a) $y = 0,\ y = 4 - 2x,\ x = 0,\ x = 1;$

b) $y = 0,\ y = \frac{1}{2}|x|,\ x = -2,\ x = 2;$

c) $y = 0,\ y = x^2,\ x = 1.$

Nurodymas. Spręsdami c) dalies užduotį pasinaudokite formule
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

---

11. Raskite plotą figūros, apribotos funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikais:

a) $f(x) = x^2 - 4x,\ g(x) = x;$

b) $f(x) = x^2 + 4x,\ g(x) = x + 4;$

c) $f(x) = 2x - x^2,\ g(x) = x - 6;$

d) $f(x) = -x^2 - x,\ g(x) = x - 4;$

e) $f(x) = 8 + 2x - x^2,\ g(x) = 2x + 4;$

f) $f(x) = (x - 2)^2,\ g(x) = 7 - 2x;$

g) $f(x) = x^3 - 4x,\ g(x) = 0,\ x \geqslant 0;$

h) $f(x) = 3(x - 2)(x - 4)^2,\ g(x) = 0.$

12. Raskite plotą figūros, apribotos kreivėmis:

a) $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 9$; b) $y = x^2$, $y = x$;
c) $y = \frac{5}{x}$, $y = 6 - x$; d) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;
e) $y = 6 \cdot 3^{-x}$, $y = x + 1$, $x = 0$; f) $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$, $x = 1$.

13. Raskite plotą figūros, apribotos kreivėmis:
a) $y = 2x^2 - 4x + 8$, $y = x^2 + 8$;
b) $y = 2x^2 - 6x - 7$, $y = x^2 - 2x - 2$.

14. Figūra apribota kreive $y = 0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5$ ir šios kreivės liestinėmis, nubrėžtomis taškuose $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Apskaičiuokite šios figūros plotą.

15. Kurio kūno tūris didesnis: rutulio su spinduliu $R = 3$, ar sukinio, gauto sukant kreivinę trapeciją, apribotą kreive $y = x(x - 4)$ ir Ox ašimi?

16. Raskite tūrį sukinio, gauto apie Ox ašį sukant figūrą, apribotą kreivėmis:
a) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 1$;
b) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$;
c) $y = \mathrm{e}^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 10$;
d) $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

Įvairūs uždaviniai

17. Įmonėje yra 115 automobilių ir dirba 120 vairuotojų. Kiekvieną dieną penktadalis automobilių lieka garaže apžiūrai ir remontui. Kiek laisvų dienų per mėnesį (30 dienų) gali turėti kiekvienas vairuotojas?

18. Sferos formos balionas sprogsta, kai jo spindulys tampa lygus 20 cm. Balioną pučiantis įrenginys per pirmą sekundę įpučia 3 ℓ oro, o per kiekvieną kitą sekundę baliono tūrį padidina vienu dešimtadaliu mažiau negu per ankstesnę sekundę. Ar pučiamas balionas kada nors sprogs, jei pučiantį įrenginį užmiršome išjungti?

19. Įrodykite, kad:
a) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}} = 1$;
b) $\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}\right)\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}\right) = 7$.

20. Įrodykite, kad trys skaičiai x, y, z, sudarantys aritmetinę progresiją, tenkina lygybę

$$x^2 + 8yz = (2y + z)^2.$$

21. Išspręskite nelygybę:
a) $|2x + 5| > 9$; b) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \geqslant 1$.

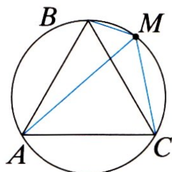
22. Išspręskite nelygybę:
a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$; b) $3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[3]{27^{2x-1}}$.

23. Rombo kraštinės ilgis yra jo įstrižainių ilgių geometrinis vidurkis. Raskite rombo kampų didumus.

24. Lygiagretainio įstrižainių ilgiai yra 6 dm ir 7 dm, o jo kraštinių ilgių skirtumas yra 2 dm. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

25. Trapecijos įstrižainių ilgiai yra 15 cm ir 20 cm, o vidurinės linijos ilgis yra 12,5 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

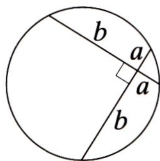
26. Į apskritimą įbrėžtas lygiakraštis trikampis ABC. Lanke BC paimtas taškas M. Įrodykite, kad $MB + MC = MA$.



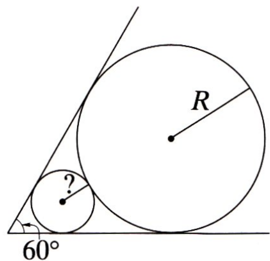
Patarimas. Atkarpoje MA atidėkite $MD = MB$. Pravartu įrodyti trikampių ABD ir BCM lygumą.

27. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo lietimosi taškas dalija įžambinę į atkarpas, kurių ilgiai yra m ir n. Įrodykite, kad trikampio plotą S galima apskaičiuoti pagal formulę $S = mn$.

28. Dvi tarpusavyje statmenos skritulio stygos dalija viena kitą į dvi atkarpas. Šių atkarpų ilgiai kiekvienoje stygoje lygūs a ir b. Įrodykite, kad skritulio plotas lygus $S = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2)$.

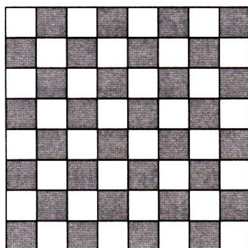


29. Į $60°$ kampą įbrėžti du apskritimai, liečiantys vienas kitą ir kampo kraštines. Didesniojo apskritimo spindulys R. Raskite mažesniojo apskritimo spindulį.



30. Į kampą įbrėžti trys apskritimai liečiantys vienas kitą ir kampo kraštines. Raskite viduriniojo apskritimo spindulį, jei kitų dviejų apskritimų spinduliai lygūs R ir r.

31. Šachmatų lenta turi $8 \times 8 = 64$ langelius, išdėstytus 8 horizontaliose ir 8 vertikaliose eilėse. Ant dviejų langelių atsitiktinai pastatome po figūrą. Kokia tikimybė, kad figūros nestovės nei toje pačioje horizontalioje, nei toje pačioje vertikalioje eilėje?



32. Paprastai dega tik viena eismą reguliuojančio šviesoforo lemputė, be to, viršutinė lemputė dega tik raudonai, vidurinė — tik geltonai, apatinė — tik žaliai. O jeigu galėtų degti bet koks lempučių skaičius, be to, kiekviena lemputė galėtų šviesti bet kuria iš trijų spalvų, kiek būtų skirtingų tokio šviesoforo pavidalų?

33. Justė parašė laiškus Tomui, Ievai ir Monikai, sudėjo juos į vokus, vokus užklijavo ir staiga susigriebė, kad ant vokų neužrašyti adresai.
– Tiek to! — pagalvojo Justė ir užrašė adresus atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad:
a) visi gaus jiems skirtus laiškus;
b) bent vienas iš trijų Justės draugų gaus jam skirtą laišką;
c) Tomas gaus jam skirtą laišką?

III Tikimybės



11. Atsitiktiniai dydžiai

11.1. Atsitiktinio dydžio sąvoka

Kai prieš bandymą negalima atspėti, kuo jis pasibaigs, sakome, kad jo baigtys atsitiktinės. Pavyzdžiui, šaudami į taikinį, nežinome, ar pataikysime; prieš mesdami kauliuką, negalime pasakyti, kiek akučių atvirs.
Mažai kas mėto kauliuką šiaip sau. Dažniausiai mėtant kauliuką žaidžiamas žaidimas, kuriame galima laimėti ir pralaimėti.

1 PAVYZDYS. Įsivaizduokime, kad su kauliuku lošiama šitaip. Metame kauliuką. Jei iškrinta 1 ar 2 akutės, pralošiame 1 Lt (galima sakyti, kad išlošiame -1 Lt), jei iškrinta 3 arba 4 akutės — nieko neišlošiame ir nieko nepralošiame (galima sakyti, kad išlošiame 0 Lt), jei iškrinta 5 ar 6 akutės — išlošiame 1 Lt.
Tegu X žymi mūsų išlošį po kauliuko metimo. Šio bandymo baigčių aibę sudaro šešios baigtys:

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\},$$

o galimų X reikšmių aibę — trys skaičiai:

$$X = \{-1; 0; 1\}.$$

Prieš bandymą X reikšmės negalime atspėti, todėl dydį X vadiname atsitiktiniu.
Dydžio X reikšmė priklauso nuo to, kuo pasibaigė bandymas. Taigi atsitiktinį dydį apibrėžia taisyklė, priskirianti baigtims skaitines reikšmes. Pavyzdžiui, mūsų pavyzdyje žodžiais nusakėme, kada X įgyja reikšmę -1, kada 0, kada 1. Patogu šią taisyklę simboliškai užrašyti taip:

$$X(e_1) = -1; \quad X(e_2) = -1; \quad X(e_3) = 0;$$
$$X(e_4) = 0; \quad X(e_5) = 1; \quad X(e_6) = 1.$$

Pavyzdžiui, užrašas $X(e_1) = -1$ reiškia, kad iškritus 1 akutei (t. y. pasirodžius baigčiai e_1) atsitiktinis dydis įgyja reikšmę -1.

1 užduotis. Kuo turi baigtis 1 pavyzdžio bandymas, kad neturėtume nuostolio? Kokia tikimybė, kad 1 pavyzdžio lošime nuostolio neturėsime?

Aišku, skaitines reikšmes 1 pavyzdžio bandymo baigtims galime priskirti ir kitaip. Pavyzdžiui, lygybėmis

$$Y(e_1) = 0; \quad Y(e_2) = 0{,}5; \quad Y(e_3) = 1;$$
$$Y(e_4) = 1; \quad Y(e_5) = 2; \quad Y(e_6) = 2$$

apibrėžiame kitą atsitiktinį dydį, susijusį su kauliuko metimu.

Taigi su tuo pačiu bandymu galima susieti daug atsitiktinių dydžių.

Taisyklė, priskirianti kiekvienai bandymo baigčiai skaitinę reikšmę, apibrėžia su tuo bandymu susijusį atsitiktinį dydį.

2 PAVYZDYS. Vieną kartą metamos dvi monetos. Herbu atsivertusių monetų skaičių pažymėkime Y. Kokią reikšmę įgis dydis Y, ne visada atspėsime. Taigi Y yra atsitiktinis dydis. Jis gali įgyti tris reikšmes: 0; 1 ir 2.
Surašykime visas šio bandymo baigtis:

$$e_1 = (S, S), \qquad e_2 = (S, H), \qquad e_3 = (H, S), \qquad e_4 = (H, H).$$

Baigtis

$$e_1 = (S, S)$$

reiškia, kad ir pirmoji, ir antroji monetos atsivertė skaičiais, baigtis

$$e_2 = (S, H)$$

— kad pirmoji moneta atsivertė skaičiumi, antroji herbu ir t. t. Tada šį atsitiktinį dydį galime nusakyti taip:

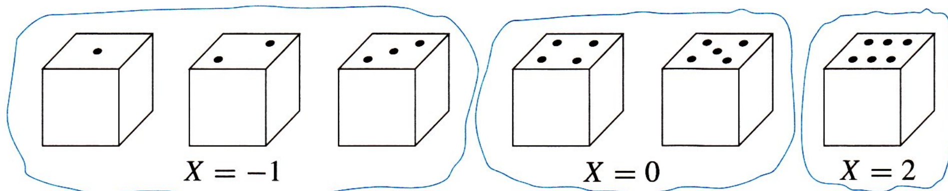
$$Y(e_1) = 0, \qquad Y(e_2) = 1, \qquad Y(e_3) = 1, \qquad Y(e_4) = 2.$$

2 užduotis. Nagrinėkime tą patį bandymą kaip 2 pavyzdyje — dviejų monetų metimą. Tegu Z yra monetų, atsivertusių herbu, skaičiaus ir monetų, atsivertusių skaičiumi, skaičiaus skirtumas. Kokias reikšmes gali įgyti šis dydis? Apibrėžkite šį atsitiktinį dydį lygybėmis kaip 2 pavyzdyje.

Taigi atsitiktinį dydį apibrėžia tam tikra taisyklė, priskirianti baigtims skaitines reikšmes. Kai bandymai labai paprasti, kaip 1 ir 2 pavyzdžiuose, tą taisyklę galime nusakyti žodžiais ir užrašyti lygybėmis. Apibrėžę atsitiktinį dydį galime atlikti bandymą ir stebėti, kokią reikšmę įgis atsitiktinis dydis.
Tačiau gyvenime dažniausiai būna kitaip. Dažnai galime tik stebėti, kokia atsitiktinio dydžio reikšmė pasirodė, o apibrėžti jį taisykle, priskiriančia baigtims skaitines reikšmes, yra sudėtinga.
Pavyzdžiui, eidami žvejoti iš anksto nežinome, kiek ešerių pagausime. Taigi pagautų ešerių skaičius — atsitiktinis dydis. Jo reikšmę sužinosime, kai baigsis bandymas, t. y. žūklė. Būtų sudėtinga net išvardyti visas bandymo baigtis. Bežvejojant visko gali nutikti: galime nieko nepagauti, galime pagauti tik aukšles ir t. t.
Štai dar vienas bandymas, kurį atliekame vos ne kasdieną: kelionė iš namų į mokyklą. Sutiktų žmonių skaičius, kelionėje į mokyklą sugaištų minučių skaičius — tai vis atsitiktinių dydžių, susijusių su šiuo bandymu, pavyzdžiai.

Pratimai ir uždaviniai

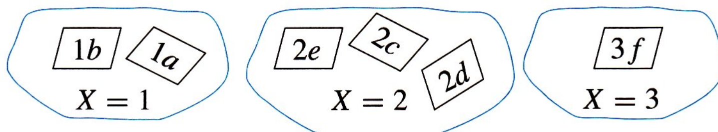
1. Su įprastiniu lošimo kauliuku lošiama šitaip. Jei iškrinta 1, 2 arba 3 akutės, pralošiame 1 Lt, jei iškrinta 4 arba 5 akutės — nieko neišlošiame ir nepralošiame, jei 6 akutės — išlošiame 2 Lt. Tegu X — išlošio dydis po vieno kauliuko metimo. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.



2. Vieną kartą metamos 2 centų ir 5 centų monetos. Tegu X — atvirtusių centų skaičių suma. Jeigu moneta atvirto herbu, laikome, kad centų skaičius lygus nuliui. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.

3. Lošimo kauliuko sienelės vietoj įprastinio žymėjimo 1, 2, 3, 4, 5, 6 akutėmis sužymėtos atitinkamai 1, 1, 1, 2, 2, 3 akutėmis. Tegu X — vieną kartą mesto tokio lošimo kauliuko atvirtusių akučių skaičius. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.

4. Ant stalo šešios kortelės. Kiekvienoje iš jų parašyta po skaičių ir raidę: $1a$, $1b$, $2c$, $2d$, $2e$, $3f$. Jas užvertus ir sumaišius, atsitiktinai paimama viena kortelė. Tegu X — ant atverstos kortelės užrašytas skaičius. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.

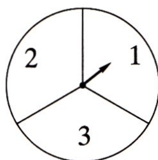


5. Dėžėje yra 2 balti ir 1 juodas rutuliai. Jie sužymėti raidėmis a, b, c. Atsitiktinai išimami 2 rutuliai. Tegu X — išimtų baltų rutulių skaičius. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.

6. Bandymas — atsitiktinis natūraliojo skaičiaus n, $2 \leqslant n \leqslant 10$, pasirinkimas. Pažymėkime X — mažiausiąjį pasirinktojo skaičiaus pirminį daliklį. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip X reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.

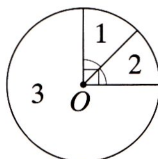
7. Vieną kartą metami du lošimo kauliukai (pirmasis ir antrasis). Jų sienelės sužymėtos atitinkamai 1, 1, 1, 1, 2, 2 akutėmis. Pažymėkime X — abiejų kauliukų atvirtusių akučių skaičių sumą. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.

8. Pasukus lošimo ratą rodyklė gali sustoti kuriame nors iš trijų sektorių, pažymėtų skaičiais 1, 2, 3.



Išlošio dydis X apskaičiuojamas pasukus lošimo ratą du kartus pagal tokią taisyklę: jei pirmą kartą pasukus ratą rodyklė sustojo sektoriuje a, o antrą — sektoriuje b, tai išlošis lygus $a - b$. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.

9. Skritulio formos taikinys pritvirtintas skritulio centre O taip, kad taikinys galėtų suktis. Šaulys du kartus šauna į greitai besisukantį taikinį, o rezultatas X skaičiuojamas sudedant abiem šūviais pelnytus taškus (laikome, kad šaulys visada pataiko į taikinį, o tikimybė pataikyti į sektorių kraštus lygi nuliui). Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.



10. Matematinio konkurso užduotis sudaryta iš trijų uždavinių. Jei gautas teisingas atsakymas, tai už pirmąjį uždavinį skiriami 2 taškai, už antrąjį — 3 taškai, už trečiąjį — 5 taškai. Jei uždavinys neišspręstas, taškų neskiriama. Konkurso dalyvio Tomo surinktų taškų skaičių pažymėkime X.
a) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
b) Sudarykite atsitiktinio dydžio X reikšmių aibę.
c) Užrašykite taisyklę, apibrėžiančią atsitiktinį dydį X.

11. Įsivaizduokime tokį bandymą: monetą mėtome tol, kol du kartus (nebūtinai iš eilės) atvirsta herbas. Pažymėkime X atliktų metimų skaičių. Iš anksto X reikšmės negalime atspėti, taigi X — atsitiktinis dydis. Kokias reikšmes gali įgyti X? Kaip galime užrašyti tokio bandymo baigtis? Kiek yra šio bandymo baigčių, kurias atitinka reikšmė $X = 4$?

11.2. Atsitiktinių dydžių skirstiniai

1 PAVYZDYS. Prisiminkime pirmąjį ankstesnio skyrelio pavyzdį. Metame simetrišką lošimo kauliuką. Jei atsiverčia 1 ar 2 akutės, atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę -1; jei 3 ar 4 — X įgyja reikšmę 0; jei 5 arba 6 — X įgyja reikšmę 1.
Taigi

$$X(e_1) = X(e_2) = -1, \qquad X(e_3) = X(e_4) = 0, \qquad X(e_5) = X(e_6) = 1.$$

Galime apskaičiuoti tikimybes, kad X įgis reikšmes -1; 0; 1:

$$\mathbf{P}(X = -1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

Surašykime šias tikimybes į lentelę:

m	-1	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Šią lentelę vadiname atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstiniu arba tiesiog *skirstiniu*. Tokią lentelę galime sudaryti bet kokiam atsitiktiniam dydžiui, galinčiam įgyti baigtinį skaičių reikšmių.
Atkreipkime dėmesį, kad sudėję visų atsitiktinio dydžio X reikšmių tikimybes, gauname vienetą:

$$\mathbf{P}(X = -1) + \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Jei atsitiktinis dydis X gali įgyti reikšmes $x_1, \ldots, x_k$ ir

$$\mathbf{P}(X = x_1) = p_1, \quad \mathbf{P}(X = x_2) = p_2, \quad \ldots, \quad \mathbf{P}(X = x_k) = p_k,$$

tai jo tikimybių skirstinys yra tokia lentelė:

m	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
$\mathbf{P}(X = m)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

Sudėję visų X reikšmių tikimybes, gausime vienetą:

$$\mathbf{P}(X = x_1) + \mathbf{P}(X = x_2) + \cdots + \mathbf{P}(X = x_k) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1.$$

Šia savybe galime pasinaudoti tikrindami, ar teisingai sudarėme atsitiktinio dydžio skirstinį: sudėję tikimybių eilutės skaičius turime gauti vienetą.

1 užduotis. Metame dvi simetriškas monetas. Dydžio X reikšmė lygi atsivertusių herbu monetų skaičiui. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.

Atsitiktinio dydžio X skirstinį galima pavaizduoti grafiškai. Nubrėžę koordinačių sistemos ašis ir atidėję plokštumoje taškus $(x_i; p_i)$, čia $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$, gausime skirstinio grafiką. Dėl vaizdumo, grafiko taškai dažnai paeiliui sujungiami atkarpomis. Šitaip gaunama laužtė, vaizduojanti atsitiktinio dydžio skirstinį.

2 PAVYZDYS. Metame du lošimo kauliukus. Atsitiktinis dydis X lygus akučių, atvirtusių ant pirmojo ir antrojo kauliukų, skaičių skirtumui. Sudarykime atsitiktinio dydžio X skirstinį ir pavaizduokime jį grafiškai.

Bandymo baigtis galime užrašyti skaičių poromis $(i; j)$, čia i — pirmojo, j — antrojo kauliuko akučių skaičius. Iš viso yra $n = 36$ baigtys. Pavaizduokime jas 6×6 dydžio kvadrato langeliais.

a)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3				(3; 4)		
4						
5						
6						

b)

	1	2	3	4	5	6
1	0	−1	−2	−3	−4	−5
2	1	0	−1	−2	−3	−4
3	2	1	0	−1	−2	−3
4	3	2	1	0	−1	−2
5	4	3	2	1	0	−1
6	5	4	3	2	1	0

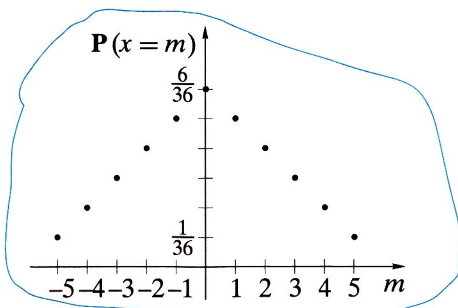
Pavyzdžiui, 3-ioje eilutėje ir 4-ame stulpelyje esantis langelis vaizduoja baigtį (3; 4), t. y. baigtį, kai pirmojo kauliuko akučių skaičius lygus 3, antrojo — 4 (žr. a) pav.).

Įrašykime į baigčių langelius atitinkamas atsitiktinio dydžio X reikšmes (žr. b) pav.).

Naudodamiesi šiuo kvadratu galime sudaryti atsitiktinio dydžio skirstinį.

m	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Pavaizduokime gautą skirstinį grafiškai.



Apskaičiuoti atsitiktinio dydžio reikšmių tikimybes taip paprastai, kaip nagrinėtuose pavyzdžiuose, retai kada galime.

Jeigu X yra žvejojant sugautų ešerių skaičius, tai X gali įgyti reikšmes 0, 1, 2, ... Kaip apskaičiuoti, pavyzdžiui, tikimybę $\mathbf{P}(X = 0)$? Kaip sudaryti X tikimybių skirstinį? Tokiais atvejais galima elgtis taip. Tarkime, X yra atsitiktinis dydis, susijęs su tam tikru bandymu. Tegu X gali įgyti reikšmes $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Tarkime, bandymą galima kartoti daug kartų ir kartojami bandymai nedaro įtakos vienas kitam. Pakartokime bandymą n kartų, čia n — gana didelis skaičius. Po kiekvieno bandymo užsirašykime gautą atsitiktinio dydžio reikšmę, o pabaigę bandymus, suskaičiuokime, kiek kartų gavome reikšmes $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Tegu šios reikšmės pasirodė atitinkamai

$$n_1, n_2, \ldots, n_k \text{ kartų}; \qquad n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Sudarykime santykius

$$f_1 = \frac{n_1}{n}, \qquad f_2 = \frac{n_2}{n}, \qquad \ldots, \qquad f_k = \frac{n_k}{n}, \qquad f_1 + f_2 + \cdots + f_k = 1.$$

Šiuos skaičius vadinsime atsitiktinio dydžio X reikšmių $x_1, \ldots, x_k$ santykiniais dažniais.

Surašykime atsitiktinio dydžio X reikšmes ir jų santykinius dažnius į lentelę:

X reikšmė	x_1	x_2	...	x_k
Reikšmės santykinis dažnis	f_1	f_2	...	f_k

Gautą lentelę vadiname *empiriniu* atsitiktinio dydžio X skirstiniu. Žodis „empirinis" pabrėžia, kad ši lentelė gauta iš bandymo duomenų.

Atsitiktinio dydžio reikšmės x_i santykinis dažnis $f_i = \frac{n_i}{n}$, žinoma, skiriasi nuo šios reikšmės tikimybės $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$. Tačiau, kai n didelis, galime teigti, kad $p_i \approx f_i$.

3 PAVYZDYS. Autoįvykių, įvykstančių magistralėje per savaitę, skaičius X yra atsitiktinis dydis. Naudodamiesi dvylikos savaičių duomenimis, sudarykime empirinį šio atsitiktinio dydžio skirstinį.

Savaitė	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Autoįvykių sk.	0	3	2	2	4	2	2	3	4	0	2	3

Duomenys buvo registruojami 12 savaičių, taigi atlikta $n = 12$ bandymų. Buvo gautos tokios X reikšmės: 0, 2, 3, 4. Reikšmė $X = 0$ buvo gauta du kartus, vadinasi, jos santykinis dažnis yra $\frac{2}{12}$. Apskaičiavę kitų reikšmių santykinius dažnius, sudarome empirinį atsitiktinio dydžio X skirstinį.

X	0	2	3	4
Santykinis dažnis	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$

2 užduotis. Bandymas — dviejų simetriškų monetų metimas. Atsitiktinis dydis X lygus atvirtusių herbu monetų skaičiui. Pakartokite šį bandymą 20 kartų ir naudodamiesi gautais duomenimis sudarykite empirinį X skirstinį. Palyginkite šį skirstinį su skirstiniu, gautu atliekant 1 užduotį.

Pratimai ir uždaviniai

12. Lošiama įprastiniu lošimo kauliuku. Jei iškrinta 1, 2 arba 3 akutės, pralošiamas 1 Lt, jei iškrinta 4 arba 5 akutės — nieko neišlošiama ir nepralošiama, jei iškrinta 6 akutės — išlošiama 3 Lt. Raskite išlošio tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

13. Vieną kartą metamos dvi 20 centų ir 50 centų monetos. Pažymėkime X — atvirtusių centų skaičių sumą (jeigu moneta atvirto herbu, centų skaičius lygus nuliui). Raskite atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

14. Ant stalo padėtos trys kortelės. Ant kiekvienos iš jų užrašyta po skaičių ir raidę: $1a$, $2b$, $2c$. Jas užvertus ir sumaišius, atsitiktinai paimamos dvi kortelės. Tegu X — šių kortelių skaičių suma, o Y — sandauga. Raskite atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y tikimybių skirstinius bei pavaizduokite juos grafiškai.

15. Lošimo kauliuko sienelės kitaip nei įprasta sužymėtos atitinkamai 1, 1, 1, 2, 2, 4 akutėmis. Tegu X — metus tokį lošimo kauliuką atvirtusių akučių skaičius. Raskite atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

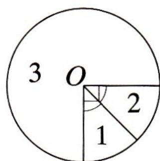
16. Lošimo kauliuko sienelės sužymėtos atitinkamai 1, 1, 2, 2, 2, 3 akutėmis. Toks lošimo kauliukas metamas du kartus. Raskite atsitiktinio dydžio X — atvirtusių akučių skaičiaus pirmame ir antrame metime sumos — tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

17. Dėžutėje yra 4 raudoni ir 3 žali balionai. Vaikas atsitiktinai iš dėžutės ištraukia vieną balioną. Tegu X — atsitiktinis dydis, įgyjantis dvi reikšmes: 0 — kai ištraukiamas raudonas balionas ir 1 — kai ištraukiamas žalias balionas. Raskite šio atsitiktinio dydžio tikimybių skirstinį.

18. Dėžutėje yra 4 raudoni ir 3 žali balionai. Vaikas atsitiktinai pasirenka 2 balionus. Pažymėkime X — pasirinktų žalių balionų skaičių. Raskite atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

19. Dėžutėje yra 4 raudoni ir 3 žali balionai. Vaikas atsitiktinai paima 1 balioną, tačiau nežinia kodėl balioną padeda atgal į dėžę ir atsitiktinai paima antrąjį. Pažymėkime X — paimtų žalių balionų skaičių. Raskite atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

20. Skritulio formos taikinys pritvirtintas skritulio centre O taip, kad jis galėtų suktis. Tarkime, kad šaulys visada pataiko į taikinį, o tikimybė pataikyti į tašką O ir į sektorių kraštus lygi nuliui.



a) Šaulys į taikinį šauna vieną kartą. Atsitiktinio dydžio X reikšmė — sektoriaus, į kurį pataikyta, numeris. Raskite atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

b) Šaulys šauna į taikinį du kartus. Raskite atsitiktinio dydžio Y — pirmojo ir antrojo šūvio rezultatų sumõs — tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

21. Išleista 500 loterijos bilietų, iš kurių vienas laimi 100 Lt, keturi — po 50 Lt, dešimt — po 5 Lt. Įsigytas vienas šios loterijos bilietas. Pažymėkime X išlošio dydį. Raskite atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

22. Tikimybė, kad krepšininkas pataikys į krepšį nuo baudos metimų linijos, lygi 0,9. Jis meta du baudos metimus. Raskite tikslių baudos metimų skaičiaus X tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

23. Krepšininkas meta du baudos metimus. Tikimybė pataikyti pirmuoju metimu lygi 0,8, antruoju — 0,9. Raskite tikslių baudos metimų skaičiaus X tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

24. Šaulys šauna į taikinį du kartus. Pataikymo pirmuoju šūviu tikimybė lygi 0,8. Jeigu jis pirmuoju šūviu pataiko, tai tikimybė, kad ir antrasis šūvis bus taiklus, lygi 0,9. Jei pirmasis šūvis netaiklus, tai tikslaus antrojo šūvio tikimybė lygi 0,8. Raskite tikslių šūvių skaičiaus X tikimybių skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai.

25. Lentelė yra atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinys. Raskite nežinomą tikimybę $p = \mathbf{P}(X = 4)$.

m	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = m)$	0,2	0,35	0,15	p

26. Lentelė yra atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinys. Raskite nežinomą tikimybę $p = \mathbf{P}(X = 1)$.

m	-1	0	1	3	5
$\mathbf{P}(X = m)$	0,1	0,2	p	0,3	0,2

11.3. Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

Prisiminkime nepriklausomų įvykių sąvoką. Du su tuo pačiu bandymu susijusius įvykius A ir B vadiname nepriklausomais, jei

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Tai matematinis apibrėžimas. Be matematinių formulių nepriklausomumo sąvoką galime nusakyti taip: du įvykiai yra nepriklausomi, jei vienam jų įvykus, tikimybė, kad įvyks antrasis (t. y. sąlyginė tikimybė), lieka ta pati, kaip ir prieš įvykstant pirmajam įvykiui.

Šiame skyriuje nagrinėjame ne tik atsitiktinius įvykius, bet ir atsitiktinius dydžius. Dydžiai yra apibūdinami jų skirstiniais, t. y. reikšmių įgijimo tikimybėmis. Atsitiktinių dydžių nepriklausomumo sąvoką galime nusakyti panašiai kaip atsitiktinių įvykių: atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, jei vienam jų įgijus reikšmę, kito dydžio reikšmių įgijimo tikimybės lieka tos pačios kaip anksčiau.

Panagrinėkime paprastą pavyzdį.

1 PAVYZDYS. Urnoje yra trys rutuliai: baltas, juodas ir raudonas. Ant baltojo ir juodojo rutulių užrašytas skaičius 0, ant raudonojo — skaičius 1. Ištraukę vieną rutulį ir užsirašę jo skaičių, rutulį grąžiname į urną. Po to iš urnos traukiame antrą rutulį. Tegu X — skaičius, užrašytas ant pirmojo rutulio, Y — skaičius, užrašytas ant antrojo rutulio. Dydžiai X ir Y yra atsitiktiniai, jie gali įgyti reikšmes 0 ir 1. Nesvarbu, kokią reikšmę įgijo dydis X, antrąjį rutulį traukiame iš urnos su tais pačiais rutuliais. Taigi dydžio X įgytos reikšmės nedaro jokios įtakos dydžio Y reikšmių įgijimo tikimybėms. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi. Nesunku sudaryti šių atsitiktinių dydžių skirstinius:

X skirstinys

m	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y skirstinys

m	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Dydžių X ir Y skirstiniai apibūdina kiekvieną iš jų skyrium. Norėdami apibūdinti juos kartu, apskaičiuokime tikimybes.

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 0), \quad \mathbf{P}(X = 0, Y = 1), \quad \mathbf{P}(X = 1, Y = 0), \quad \mathbf{P}(X = 1, Y = 1).$$

Čia, pavyzdžiui, $\mathbf{P}(X = 1, Y = 0)$ žymi tikimybę, kad bandymui pasibaigus dydis X bus įgijęs reikšmę 1, o dydis Y — reikšmę 0. Tikimybes galime apskaičiuoti pasinaudoję klasikiniu tikimybės apibrėžimu. Bandymo (dviejų rutulių traukimo su grąžinimu) baigtis pažymėkime šitaip:

$$e_1 = (b; b), \quad e_2 = (b; j), \quad e_3 = (b; r),$$
$$e_4 = (j; b), \quad e_5 = (j; j), \quad e_6 = (j; r),$$
$$e_7 = (r; b), \quad e_8 = (r; j), \quad e_9 = (r; r).$$

Dydžius X ir Y galime nusakyti lygybėmis

$$X(e_1) = X(e_2) = X(e_3) = X(e_4) = X(e_5) = X(e_6) = 0,$$

$$X(e_7) = X(e_8) = X(e_9) = 1,$$

$$Y(e_1) = Y(e_2) = Y(e_4) = Y(e_5) = Y(e_7) = Y(e_8) = 0,$$

$$Y(e_3) = Y(e_6) = Y(e_9) = 1.$$

Dydis X įgyja reikšmę 1, o dydis Y — reikšmę 0 tada, kai bandymas baigiasi baigtimi e_7 arba e_8.
Taigi

$$\mathbf{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbf{P}(e_7) + \mathbf{P}(e_8) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Panašiai apskaičiuojame ir kitas tikimybes:

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{4}{9}, \qquad \mathbf{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{2}{9}, \qquad \mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{9}.$$

Patogu šias tikimybes surašyti į tokią lentelę:

Y \ X	0	1
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Pirmoje lentelės eilutėje surašytos galimos dydžio X reikšmės, pirmajame stulpelyje — galimos Y reikšmės. Langelyje, kuris atitinka dydžio X reikšmę 1 ir dydžio Y reikšmę 0 įrašyta tikimybė $\mathbf{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{2}{9}$ ir t. t.
Tokia lentelė vadinama atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstiniu. Iš jos galime lengvai rasti ir dydžių X bei Y reikšmių tikimybes.
Sudėję, pavyzdžiui, stulpelio, atitinkančio reikšmę $X = 0$, skaičius, gausime tikimybę $\mathbf{P}(X = 0)$:

$$\mathbf{P}(X = 0) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Sudėję eilutės, atitinkančios reikšmę $Y = 1$, skaičius, gausime tikimybę $\mathbf{P}(Y = 1)$:

$$\mathbf{P}(Y = 1) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Analogiškai gauname ir tikimybes $\mathbf{P}(X = 1)$, $\mathbf{P}(Y = 0)$.

Pastebėkime, kad:

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbf{P}(X = 0) \cdot \mathbf{P}(Y = 1).$$

Teisinga ne tik ši, bet ir dar trys lygybės:

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0) \cdot \mathbf{P}(Y = 0),$$
$$\mathbf{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 0),$$
$$\mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 1).$$

Įsitikinkite!

Naudodamiesi panašiomis lygybėmis, suformuluosime matematinį nepriklausomų atsitiktinių dydžių apibrėžimą.

APIBRĖŽIMAS
Atsitiktiniai dydžiai X, Y vadinami nepriklausomais, jeigu su visomis jų reikšmėmis x, y yra teisingos lygybės

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y).$$

2 PAVYZDYS. Kaip ir 1 pavyzdyje, į urną yra įdėti trys rutuliai: baltas, juodas ir raudonas. Ant baltojo ir juodojo rutulių užrašytas skaičius 0, ant raudonojo — skaičius 1. Vėl vieną po kito traukiame du rutulius. Tačiau šįkart ištrauktųjų rutulių nebegrąžiname į urną. Tegu X — pirmojo ištrauktojo rutulio numeris, Y — antrojo. Dydžiai X ir Y yra atsitiktiniai. Ar jie ir šiuo atveju yra nepriklausomi? Truputį pagalvoję, tikriausiai atsakysime, kad ne. Iš tiesų, jei, pavyzdžiui, $X = 1$, tai net ir netraukę antrojo rutulio žinome, kad ant jo bus užrašytas skaičius 0, t. y. Y įgis reikšmę 0. Tiesa, jei $X = 0$, tai dydis Y galės įgyti ir reikšmę 0, ir reikšmę 1. Tačiau apskaičiavę šių reikšmių tikimybes gautume kitokius skaičius, negu skaičiuodami bandymui dar neprasidėjus. Taigi X, Y yra *priklausomi* atsitiktiniai dydžiai. Sudarykime šio bandymo (dviejų rutulių traukimo be grąžinimo) baigčių aibę:

$$e_1 = (b; j), \quad e_2 = (b; r), \quad e_3 = (j; b),$$
$$e_4 = (j; r), \quad e_5 = (r; b), \quad e_6 = (r; j).$$

Čia, pavyzdžiui, $e_4 = (j; r)$ žymime baigtį, kai pirmasis ištrauktas rutulys juodas, o antrasis raudonas.

Užduotis. Apibrėžkite atsitiktinius dydžius X, Y lygybėmis. Sudarykite atsitiktinių dydžių X, Y poros tikimybių skirstinį. Sudarykite dydžių X ir Y skirstinius. Įsitikinkite, kad dydžiai X, Y netenkina matematinio nepriklausomų dydžių apibrėžimo sąlygos.

Dažnai išvadą, kad atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi, padarome netikrindami, ar jie tenkina nepriklausomų dydžių apibrėžimą.
Jeigu, pavyzdžiui, vienas atsitiktinis dydis susijęs su vienu bandymu, kitas — su kitu, ir tie bandymai nedaro įtakos vienas kitam, tai ir atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi. Tarkime, pavyzdžiui, kad lošimo kauliukas metamas du kartus, X — pirmojo metimo atvirtusių akučių skaičius, Y — antrojo. Dydžiai X ir Y yra, žinoma, nepriklausomi.

Pratimai ir uždaviniai

27. Urnoje yra keturi rutuliai: baltas, juodas, raudonas ir mėlynas. Ant baltojo, juodojo ir raudonojo rutulių užrašytas skaičius 0, ant mėlynojo — skaičius 1. Ištraukę vieną rutulį ir užsirašę jo skaičių, grąžiname rutulį į urną. Po to iš urnos traukiame antrą rutulį. Tegu X — skaičius, užrašytas ant pirmojo rutulio, Y — ant antrojo.

a) Sudarykite bandymo baigčių aibę.

b) Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinių dydžių X, Y reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.

c) Sudarykite atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y tikimybių skirstinius.

d) Sudarykite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.

e) Įsitikinkite, kad atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi (patikrinkite, ar galioja matematinis nepriklausomų atsitiktinių dydžių apibrėžimas).

28. Yra dvi urnos. Pirmoje urnoje yra 2 balti ir 1 juodas rutuliai, antroje — 1 baltas ir 2 juodi. Iš pirmosios urnos ištraukiame vieną rutulį, o iš antrosios — du rutulius. Tegu X — iš pirmosios urnos ištrauktų juodų rutulių skaičius (0 arba 1), Y — iš antrosios urnos ištrauktų juodų rutulių skaičius (1 arba 2).

a) Sudarykite bandymo baigčių aibę.

b) Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinių dydžių (X, Y) reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.

c) Sudarykite atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y tikimybių skirstinius.

d) Sudarykite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.

e) Įsitikinkite, kad atsitiktiniai dydžiai X ir Y tenkina matematinį nepriklausomų dydžių apibrėžimą, taigi yra nepriklausomi.

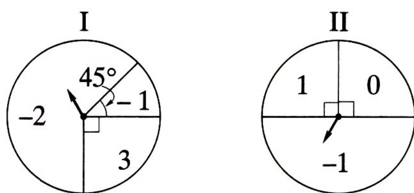
29. Du kartus metama moneta ir vieną kartą — įprastinis lošimo kauliukas. Tegu X — monetos atvirtimų herbu skaičius, Y — lošimo kauliuko atvirtusių akučių skaičius.

a) Raskite atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y tikimybių skirstinius.

b) Raskite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.

c) Nustatykite, ar dydžiai X ir Y nepriklausomi.

30. Du lošimo ratai suskirstyti sektoriais taip:



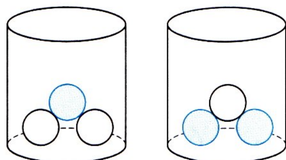
Ant sektoriaus užrašytas skaičius reiškia laimėjimo didumą (jei skaičius neigiamas, tai pralošiama). Žaidėjas iš pradžių pasuka I ratą, po to — II ratą. Tegu X yra laimėjimo didumas prie I rato, o Y — prie II rato.

a) Raskite atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y skirstinius.
b) Raskite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.
c) Nustatykite, ar dydžiai X ir Y nepriklausomi.

31. Urnoje yra 4 rutuliai: baltas, juodas, raudonas ir mėlynas. Ant baltojo, juodojo ir raudonojo rutulių užrašytas nulis, o ant mėlynojo — vienetas. Ištraukę vieną rutulį ir užsirašę jo skaičių, padedame jį šalia urnos, po to traukiame antrą rutulį. Tegu X — pirmojo ištraukto rutulio skaičius, o Y — antrojo.

a) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
b) Raskite atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y tikimybių skirstinius.
c) Raskite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.
d) Įsitikinkite, kad atsitiktiniai dydžiai X ir Y netenkina matematinio nepriklausomų dydžių apibrėžimo sąlygų, taigi yra priklausomi.

32. Yra dvi urnos. Pirmoje urnoje yra 2 balti ir 1 mėlynas rutuliai, antroje — 1 baltas ir 2 mėlyni.



Iš pirmosios urnos ištraukiame vieną rutulį ir įdedame jį į antrąją urną. Tuomet iš antrosios urnos paimame vieną rutulį. Tegu X — iš pirmosios urnos ištrauktų mėlynų rutulių skaičius (0 arba 1), Y — iš antrosios urnos ištrauktų mėlynų rutulių skaičius (0 arba 1).

a) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
b) Raskite atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y tikimybių skirstinius.
c) Raskite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.
d) Įsitikinkite, kad dydžiai X ir Y netenkina matematinio nepriklausomų dydžių apibrėžimo sąlygų, taigi yra priklausomi.

11.4. Binominiai atsitiktiniai dydžiai

Jei mesime monetą, ji atvirs skaičiumi arba herbu į viršų. Tai labai paprastas bandymas su dviem baigtimis. Pavadinkime vieną baigtį (pavyzdžiui, kad atvirto skaičius) sėkme ir pažymėkime S; kitą baigtį pavadinkime nesėkme ir pažymėkime N. Jeigu moneta simetriška, tai sėkmės ir nesėkmės tikimybės vienodos ir lygios $\frac{1}{2}$. Kai moneta nesimetriška, tai šios tikimybės skirtingos. Pažymėkime sėkmės tikimybę p $(0 < p < 1)$, o nesėkmės — q. Tada

$$q = 1 - p, \quad p + q = 1.$$

1 PAVYZDYS. Pakartokime tą patį bandymą su dviem baigtimis — sėkme ir nesėkme — $n = 2$ kartus. Taigi atlikime bandymą, sudarytą iš dviejų paprastų bandymų. Šio bandymo baigtys yra keturios. Žymėkime jas taip:

$$SS, \quad SN, \quad NS, \quad NN$$

Tarkime, kad pirmasis bandymas (pirmasis monetos metimas) nedaro jokios įtakos antrajam (t. y. bandymai yra nepriklausomi). Todėl baigčių tikimybės bus tokios:

$$\mathbf{P}(SS) = p \cdot p = p^2, \qquad \mathbf{P}(SN) = pq, \qquad \mathbf{P}(NS) = qp, \qquad \mathbf{P}(NN) = q^2.$$

Pažymėkime X — sėkmių skaičių, gautą atlikus abu bandymus. Dydis X yra atsitiktinis, jis gali įgyti reikšmes 0, 1, 2. Surašykime visas baigtis, jų tikimybes ir atitinkamas X reikšmes į lentelę:

Baigtys	SS	SN	NS	NN
Baigčių tikimybės	p^2	pq	qp	q^2
X	2	1	1	0

Iš šios lentelės lengva rasti X reikšmių tikimybes. Pavyzdžiui,

$$\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(SN) + \mathbf{P}(NS) = pq + qp = 2pq.$$

Sudarykime atsitiktinio dydžio X skirstinį

m	0	1	2
$\mathbf{P}(X = m)$	q^2	$2pq$	p^2

Visų tikimybių suma lygi 1:

$$q^2 + 2qp + p^2 = 1 \quad (q + p = 1).$$

2 PAVYZDYS. Žinoma, bandymą su dviem baigtimis galime pakartoti ne du, bet daugiau kartų. Tarkime, bandymą kartojame $n = 3$ kartus. Tegu sėkmės tikimybė yra p $(0 < p < 1)$, nesėkmės — q, $q + p = 1$. Pažymėkime gautų sėkmių skaičių X. Dydis X yra atsitiktinis, jis gali įgyti reikšmes 0, 1, 2, 3. Kaip 1 pavyzdyje surašykime bandymo baigtis, jų tikimybes ir atitinkamas X reikšmes į vieną lentelę:

Baigtys	SSS	SSN	SNS	NSS	SNN	NSN	NNS	NNN
Baigčių tikimybės	p^3	p^2q	p^2q	p^2q	pq^2	pq^2	pq^2	q^3
X	3	2	2	2	1	1	1	0

Atsitiktinio dydžio skirstinys toks:

m	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m)$	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

Visų tikimybių suma lygi 1, taigi: $q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3 = 1$ $(p + q = 1)$.

O dabar nagrinėkime bendrąjį atvejį. Tarkime, bandymą su dviem baigtimis — sėkme ir nesėkme — kartojame n kartų, o bandymai nedaro įtakos vieni kitiems. Tegu p — sėkmės, q — nesėkmės tikimybė $(0 < p < 1,\ p + q = 1)$, o X — sėkmių skaičius, gautas atlikus visus bandymus. Dydis X yra atsitiktinis, jis gali įgyti reikšmes $0, 1, 2 \ldots, n$. Visų baigčių dabar negalime surašyti, todėl samprotaukime.
Dydis X įgis reikšmę 0 tik tuo atveju, kai visi bandymai pasibaigs nesėkme, t. y. kai baigtis bus $NN \ldots N$. Taigi

$$\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(NN \ldots N) = q \cdot \ldots \cdot q = q^n.$$

Dydis X įgis reikšmę 1, kai visi bandymai, išskyrus vieną, pasibaigs nesėkme. Iš viso yra n tokių baigčių:

$$SNN \ldots N, \quad NSN \ldots N, \quad NN \ldots NS.$$

Visų šių baigčių tikimybės vienodos, pavyzdžiui,

$$\mathbf{P}(SN \ldots N) = pq \cdot \ldots \cdot q = pq^{n-1}, \qquad \mathbf{P}(NSN \ldots N) = qpq^{n-2} = pq^{n-1}.$$

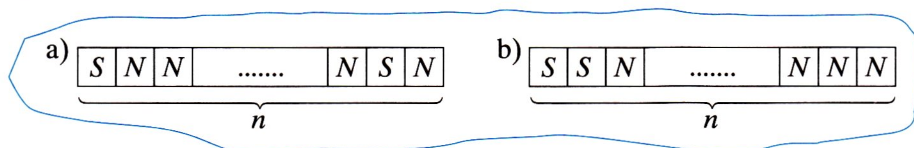
Taigi

$$\mathbf{P}(X = 1) = npq^{n-1}.$$

Dydis X įgis reikšmę 2, kai visi, išskyrus du bandymus, pasibaigs nesėkme. Yra daug tokių baigčių, pavyzdžiui $SSN \ldots N$, $SNSN \ldots N$ ir t. t. Visų šių baigčių tikimybės vienodos, pavyzdžiui,

$$\mathbf{P}(SSN \ldots N) = p^2q^{n-2}, \qquad \mathbf{P}(SNSN \ldots N) = pqpq \cdot \ldots \cdot q = p^2q^{n-2}.$$

Taigi tikimybę $\mathbf{P}(X = 2)$ apskaičiuosime, suradę, kiek yra baigčių su lygiai dviem sėkmėmis ir padauginę šį skaičių iš p^2q^{n-2}. Visas tokias baigtis galėtume surašyti taip. Paimkime juostelę, kurią sudaro n tuščių langelių, parinkę du langelius įrašykime į juos sėkmės simbolį S, o kitus langelius užpildykime nesėkmės ženklais N (žr. a) pav.).



Po to imkime kitą juostelę ir kitaip parinkime du langelius sėkmės ženklui įrašyti (žr. b) pav.). Šitaip galėsime užpildyti lygiai tiek juostelių, kiek yra galimybių iš n langelių pasirinkti 2, t. y. kiek yra 2 elementų iš n derinių. Taigi tokių juostelių, o kartu ir baigčių yra C_n^2, todėl

$$\mathbf{P}(X = 2) = C_n^2 p^2 q^{n-2}.$$

Panašiai gautume, kad

$$\mathbf{P}(X = 3) = C_n^3 p^3 q^{n-3}$$

ir apskritai

$$\mathbf{P}(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Pastebėkime, kad ši formulė teisinga ir su $m = 0$, $m = n$ ($C_n^0 = C_n^n = 1$).
Dabar jau galime sudaryti atsitiktinio dydžio X skirstinį:

m	0	1	2	3	4	...	$n-1$	n
$\mathbf{P}(X = m)$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$			...	$C_n^{n-1} p^{n-1} q$	p^n

Kadangi visų tikimybių suma lygi 1, tai

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} p^{n-1} q + p^n = 1 \quad (0 < p < 1, p + q = 1). \tag{1}$$

APIBRĖŽIMAS
Jeigu atsitiktinis dydis X gali įgyti reikšmes $0, 1, \ldots n$ ir

$$\mathbf{P}(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

čia $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, tai X vadinamas binominiu atsitiktiniu dydžiu.

Taigi sėkmių skaičius, gautas atlikus n vienodų ir nepriklausomų bandymų, yra binominis atsitiktinis dydis.

Primename, kad dydį C_n^m galime apskaičiuoti taip:

$$C_n^m = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}^{m}}{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Panagrinėkime (1) lygybę. Ji teisinga su visais p, q, $0 < p < 1$, $p + q = 1$. Tegu a, b — bet kokie teigiami skaičiai. Pažymėkime

$$p = \frac{b}{a+b}, \quad q = \frac{a}{a+b}.$$

Tada $0 < p < 1$, $p + q = 1$. Įstatę p ir q reikšmes į (1), gausime:

$$\frac{a^n}{(a+b)^n} + C_n^1 \cdot \frac{a^{n-1}b}{(a+b)^n} + C_n^2 \cdot \frac{a^{n-2}b^2}{(a+b)^n} + \cdots + C_n^{n-1} \cdot \frac{ab^{n-1}}{(a+b)^n} + \frac{b^n}{(a+b)^n} = 1.$$

Padauginę abi lygybės puses iš $(a+b)^n$, gauname:

$$a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n = (a+b)^n.$$

Taigi gavome formulę, kuri rodo, kaip kelti dvinarį $a + b$ (lotyniškai binomą) n-tuoju laipsniu:

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n}$$

Ši formulė teisinga su visais, ne vien tik su teigiamais a, b. Ji vadinama Niutono binomu.

1 užduotis. Sumos kvadrato ir kubo formules (t. y. Niutono binomo formulę su $n = 2; 3$) jau žinote. Parašykite Niutono binomo formulę, kai $n = 4; 5$.

Grįžkime prie bandymų su dviem baigtimis.

3 PAVYZDYS. Krepšininkas pataiko 60% baudos metimų. Nuo baudos metimų linijos jis ruošiasi mesti $n = 5$ kartus. Kokia tikimybė, kad jis pataikys lygiai tris kartus? Taigi šiuo atveju bandymas — kamuolio metimas į krepšį nuo baudos linijos. Pataikymas — sėkmė, nepataikymas — nesėkmė. Sėkmės tikimybė $p = 0{,}6$; nesėkmės $q = 1 - p = 0{,}4$, o bandymas kartojamas $n = 5$ kartus. Jei X — pataikymų skaičius, tai

$$\mathbf{P}(X = 3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456.$$

2 užduotis. Sudygsta maždaug 80% visų pasėtų augalo sėklų. Kokia tikimybė, kad pasėjus 7 sėklas, sudygs penkios?

Pratimai ir uždaviniai

33. Tikimybė, kad loterijos bilietas bus laimingas, lygi 0,08. Kokia tikimybė, kad iš 5 pirktų bilietų bus laimingi:
a) 2 bilietai; b) 3 bilietai; c) visi penki bilietai?

34. Keturis kartus metamas įprastinis lošimo kauliukas. Stebimas įvykis, kad atvirs daugiau negu 4 akutės. Apskaičiuokite tikimybę, kad stebimasis įvykis įvyks:
a) 2 kartus; b) 3 kartus; c) bent 2 kartus; d) mažiau negu 3 kartus.

35. Tegu X — atsitiktinis dydis, kurio reikšmė — monetos atvirtimų herbu skaičius, metus ją 5 kartus. Parašykite atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinį, pavaizduokite jį grafiškai.

36. Keturis kartus metami du įprastiniai lošimo kauliukai. Stebimas įvykis, kad atvirtusių akučių suma didesnė už 8. Kokia tikimybė, kad stebimasis įvykis:
a) įvyks 2 kartus; b) įvyks 3 kartus; c) neįvyks nė karto?

37. Parašykite pataikymų į taikinį skaičiaus tikimybių skirstinį, jeigu šaunama 3 kartus, o kiekvieno šūvio pataikymo tikimybė lygi 0,7. Pavaizduokite gautąjį skirstinį grafiškai.

38. Sėklų daigumas yra 98%. Kokia tikimybė, kad iš 6 pasėtų sėklų sudygs:
a) trys; b) keturios; c) visos šešios?

39. Apdrausta 80% automobilių. Apskaičiuokite tikimybę, kad iš penkių atsitiktinai pasirinktų automobilių bus apdrausti:
a) du automobiliai; b) bent du automobiliai; c) mažiau kaip 2 automobiliai.

40. Kokia tikimybė, kad iš piniginės pabėrus ant stalo 10 monetų:
a) pusė iš jų atvirs herbu; b) visos atvirs herbu?

41. Tikimybė, kad Jonas laimės šachmatų partiją prieš Petrą, lygi 0,5. Kas labiau tikėtina — ar kad Petras laimės prieš Joną 3 partijas iš 4, ar 5 partijas iš 8?

42. Tikimybė, kad į parduotuvę užėjęs žmogus ką nors įsigis, lygi 0,3. Kokia tikimybė, kad iš 8 užėjusių į parduotuvę žmonių ką nors nusipirks:
a) keturi; b) penki?

43. Krepšininkas baudos metimą pataiko su tikimybe 0,7. Kas labiau tikėtina: ar kad krepšininkas pataikys 6 kartus, ar kad 8 kartus iš 10 baudos metimų?

44. Tikimybė, kad gims berniukas lygi 0,51. Kokia tikimybė, kad iš 7 naujagimių bent vienas bus berniukas?

45. Žinoma, kad apie 25% naujai įsikūrusių verslo įmonių bankrutuoja. Apskaičiuokite tikimybę, kad iš dešimties naujai įsikūrusių verslo įmonių bankrutuos:
a) trys įmonės; b) ne daugiau kaip dvi įmonės.

46. Moneta metama 5 kartus. Pažymėkime X herbo atvirtimo skaičių. Su kuria m reikšme tikimybė $\mathbf{P}(X = m)$ didžiausia?

47. Atliekami keturi vienodi ir nepriklausomi bandymai, kurių kiekvienas gali baigtis sėkme arba nesėkme. Tegu X — sėkmių skaičius, atlikus 4 bandymus. Kokia turi būti sėkmės tikimybė viename bandyme, kad būtų teisinga lygybė:

$\mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X = 4)$?

48. Tikimybė, kad krepšininkas du kartus mesdamas į krepšį nuo baudos metimų linijos abu kartus pataikys, yra 0,81. Apskaičiuokite tikimybę, kad iš 10 metimų bus taiklūs:

a) penki; b) aštuoni; c) visi dešimt.

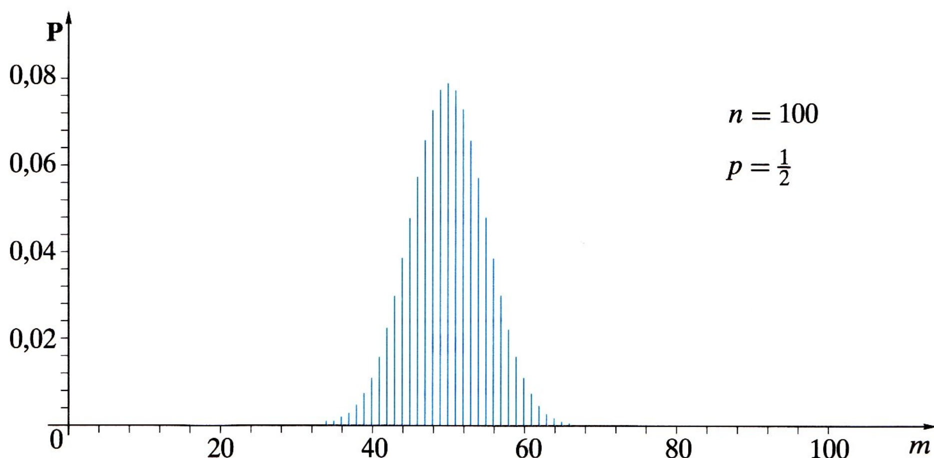
49. Tikimybė, kad iš dviejų atsitiktinai parinktų dvyliktokų bent vienas bus aukštesnis negu 180 cm, lygi 0,99. Apskaičiuokite tikimybę, kad iš 5 atsitiktinai parinktų dvyliktokų bus didesni negu 180 cm:

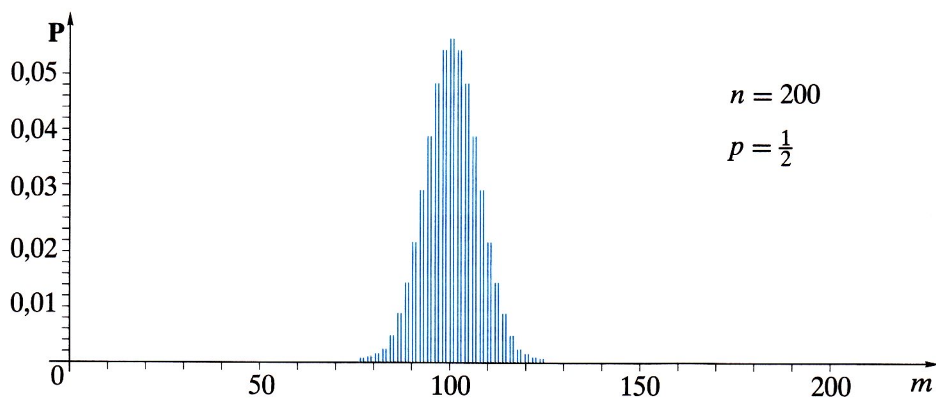
a) du; b) trys; c) visi penki.

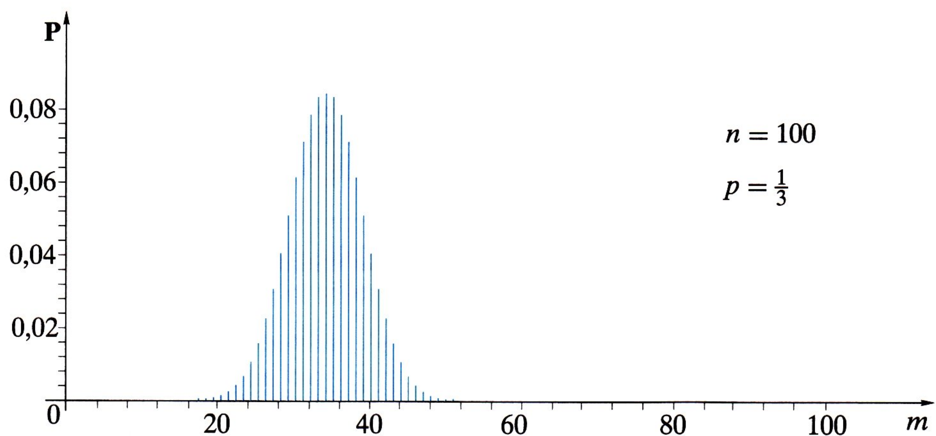
50. Galima įrodyti, kad tikimybės $\mathbf{P}(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ didėjant m iš pradžių didėja, o po to ima mažėti. Įrodykite šį teiginį su $n = 5$, $p = q = \frac{1}{2}$.

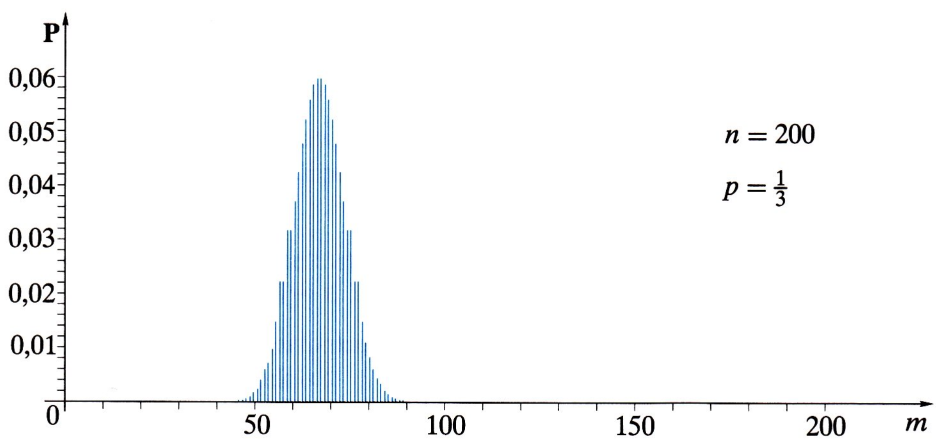
Patarimas. Panagrinėkite santykį $\frac{\mathbf{P}(X=m+1)}{\mathbf{P}(X=m)}$. Su kokiais m jis didesnis už 1, su kokiais — mažesnis?

Skaičiuoti tikimybes $\mathbf{P}(X = m)$, kai bandymų skaičius n didelis — menkas malonumas. Tačiau kompiuteriui — vieni niekai. Pasitelkę kompiuterį, tikimybes $\mathbf{P}(X = m)$ galima pavaizduoti brėžiniais. Štai kokias varpo formos figūras gautume!




P
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
50
100
150
200
m
$n = 200$
$p = \frac{1}{2}$


P
0,08
0,06
0,04
0,02
0
20
40
60
80
100
m
$n = 100$
$p = \frac{1}{3}$


P
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
50
100
150
200
m
$n = 200$
$p = \frac{1}{3}$

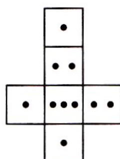
12. Skaitinės atsitiktinių dydžių charakteristikos

12.1. Matematinė viltis

Kartais loterijose pavyksta laimėti. Laimėjimai būna įvairūs. Taigi laimėjimas loterijoje dažniausiai yra atsitiktinis dydis, galintis įgyti kelias reikšmes. Atsitiktinio dydžio savybes nusako jo skirstinys, t. y. jo reikšmių tikimybės. Jeigu reikšmių daug, tai ir tikimybių daug. Visas jas surašę, vargu ar suprasime, kiek gi vidutiniškai žmonės laimi loterijoje.

Šiame skyrelyje sužinosite, kaip skaičiuoti atsitiktinio dydžio reikšmių vidurkį, kitaip dar vadinamą *matematine viltimi*.

1 PAVYZDYS. Mėtykime simetrišką lošimo kauliuką. Pažymėkime ant jo sienų akutes kitaip, nei įprasta. Pavyzdžiui, taip



Tegu X yra akučių skaičius ant atvirtusios kauliuko sienelės. Tada X yra atsitiktinis dydis, galintis įgyti reikšmes 1, 2, 3. Nesunku sudaryti šio atsitiktinio dydžio skirstinį:

m	1	2	3
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

O dabar atlikime „mintinį eksperimentą“. Įsivaizduokime, kad kauliuką metėme didelį skaičių N kartų. Kiek kartų dydis X įgis reikšmes 1, 2, 3, atspėti negalime, tačiau pasikliaudami nuojauta galime tvirtinti, kad reikšmės 1, 2, 3 pasirodys atitinkamai $\approx\frac{3}{6}N$, $\approx\frac{2}{6}N$, $\approx\frac{1}{6}N$ kartų.

Jeigu pasirodžiusių akučių skaičius sumuosime, bandymų pabaigoje gautasis skaičius bus

$$\approx 1\cdot\frac{3}{6}N+2\cdot\frac{2}{6}N+3\cdot\frac{1}{6}N.$$

Padaliję bendrą taškų skaičių iš metimų skaičiaus surasime, kiek taškų tenka vienam metimui:

$$\approx\frac{1}{N}\Big(1\cdot\frac{3}{6}N+2\cdot\frac{2}{6}N+3\cdot\frac{1}{6}N\Big)=1\cdot\frac{3}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}.$$

Taigi skaičių $1\frac{2}{3}$ galime vadinti atsitiktinio dydžio X vidutine reikšme arba vidurkiu. Pastebėkime, kad šį skaičių gavome apskaičiavę sumą

$$1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1 \cdot \mathbf{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbf{P}(X = 2) + 3 \cdot \mathbf{P}(X = 3).$$

Dabar apibrėžkime atsitiktinio dydžio vidurkį bendruoju atveju.

APIBRĖŽIMAS

Jei atsitiktinis dydis įgyja reikšmes $x_1, \ldots, x_k$, tai jo matematine viltimi (arba vidurkiu) vadiname skaičių

$$\mathbf{E}X = x_1 \cdot \mathbf{P}(X = x_1) + x_2 \cdot \mathbf{P}(X = x_2) + \cdots + x_k \cdot \mathbf{P}(X = x_k).$$

1 užduotis. Dydis Y — akučių, atsivertusių ant įprastinio simetriško lošimo kauliuko, skaičius. Apskaičiuokite $\mathbf{E}Y$.

Norint apskaičiuoti atsitiktinio dydžio vidurkį, geriausia iš pradžių sudaryti atsitiktinio dydžio skirstinį.

2 PAVYZDYS. Krepšinio turnyrų statistika rodo, kad krepšininkas pataiko 70% baudos metimų. Krepšininkas ruošiasi mesti 3 baudas. Tegu X — pataikytų metimų skaičius. Kam lygus atsitiktinio dydžio X vidurkis?

Vieną metimą galime laikyti bandymu su dviem baigtimis — sėkme ir nesėkme. Sėkmės tikimybe laikysime skaičių $p = \frac{70}{100} = 0{,}7$, tada nesėkmės tikimybė $q = 1 - p = 0{,}3$.

Taigi X — binominis atsitiktinis dydis. Sudarykime jo skirstinį:

m	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m)$	$\left(\frac{3}{10}\right)^3$	$3 \cdot \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2$	$3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{10}$	$\left(\frac{7}{10}\right)^3$

Tada

$$\mathbf{E}X = 0 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 + 1 \cdot 3 \cdot \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 + 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{21}{10} = 2{,}1.$$

2 užduotis. Urnoje yra du balti rutuliai ir vienas juodas. Vieną po kito be grąžinimo traukiame du rutulius. Tegu X — baltų rutulių skaičius tarp ištrauktųjų. Raskite $\mathbf{E}X$.

Pratimai ir uždaviniai

51. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį, kai duotas X tikimybių skirstinys:

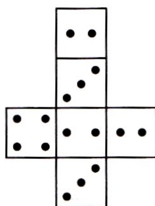
a)

m	-1	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m)$	0,2	0,1	0,3	0,4

b)

m	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

52. Metamas simetriškas lošimo kauliukas, kurio sienelės pažymėtos atitinkamai 2, 2, 2, 3, 3, 4 akutėmis. Apskaičiuokite atvirtusių akučių skaičiaus matematinę viltį.



53. Metamas tetraedro formos lošimo kauliukas, kurio sienelės pažymėtos viena, dviem, trimis ir keturiomis akutėmis. Stebima, ant kurios sienelės kauliukas atsistojo. Šios sienelės akučių skaičių pažymėkime X. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.

54. Metamas oktaedro formos lošimo kauliukas, kurio sienelės pažymėtos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 akutėmis. Sienelės, ant kurios atsistoja kauliukas, akučių skaičių pažymėkime X. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.

55. Metami du tetraedro formos lošimo kauliukai, kurių sienelės pažymėtos viena, dviem, trimis ir keturiomis akutėmis. Stebima, ant kurių sienelių atsistos kauliukai ir šių sienelių akučių skaičiai sudedami. Pažymėkime šią sumą X. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.

56. Iš specialios medžiagos buvo pagamintas kubo formos lošimo „superkauliukas“. Bandant šį kauliuką, po 1000 metimų buvo gauti tokie rezultatai:

Akučių skaičius	1	2	3	4	5	6
Atsivertimų skaičius	151	167	180	170	160	172

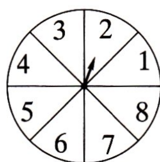
Apskaičiuokite vidutinį atvirtusių akučių skaičių. Kiek šis vidurkis skiriasi nuo „teorinio“ kubo formos lošimo kauliuko atvirtusių akučių skaičiaus vidurkio (matematinės vilties)?

57. Tomas ir Andrius lošia vieną kartą mesdami įprastinį lošimo kauliuką. Jei atvirsta mažiau negu 5 akutės, tai Tomas atiduoda Andriui 1 litą. Jeigu atvirsta daugiau negu 4 akutės, tai Tomas gauna iš Andriaus 2 litus. Pažymėkime Tomo išlošį X. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.

58. Vieną kartą metamos dvi monetos — 2 centų ir 5 centų. Pažymėkime X atvirtusių centų skaičių sumą (jei moneta atvirsta herbu, laikome, kad skaičius lygus nuliui). Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.

59. Krepšininkas, mesdamas baudą, pataiko į krepšį su tikimybe 0,75. Krepšininkas ruošiasi mesti 2 baudas. Tegu X — pataikytų metimų skaičius. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.

60. Lošimo ratas suskirstytas į 8 vienodo didumo sektorius, kuriuose surašyti laimėjimo didumai litais. Kokia turi būti bilieto kaina, kad lošimo rato savininkas iš kiekvieno lošėjo gautų vidutiniškai 20 centų pelno?



61. Apskaičiuokite nežinomas tikimybes p_1 ir p_2, jeigu atsitiktinio dydžio X matematinė viltis

$\mathbf{E}X = 0{,}04,$

o jo skirstinys yra:

m	-1	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	p_1	p_2	$0{,}1$

62. Atsitiktinio dydžio X matematinė viltis

$\mathbf{E}X = -1.$

Apskaičiuokite nežinomas skirstinio tikimybes p_1 ir p_2:

m	-2	-1	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	p_1	p_2	$0{,}1$	$0{,}2$

63. Dėžutėje yra 4 saldainiai, kurie sveria 5, 6, 7 ir 8 gramus. Atsitiktinai ištraukęs du saldainius, Tomas atidavė broliui lengvesnį. Pažymėkime X — Tomui tekusio saldainio svorį, o Y — jo broliui tekusio saldainio svorį. Raskite X ir Y matematines viltis.

64. Atsitiktinai parinkę dviženklį skaičių n, $10 \leqslant n \leqslant 30$, apskaičiuojame jo skaitmenų sumą X. Raskite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.

12.2. Atsitiktinio dydžio dispersija

Tą patį vidurkį gali turėti labai skirtingi atsitiktiniai dydžiai.

1 PAVYZDYS. Lošiama su simetriška moneta. Jei iškrinta herbas — laimimas 1 ct, jei skaičius — pralaimimas 1 ct. Taigi laimėjimą galime nusakyti atsitiktiniu dydžiu X, įgyjančiu reikšmes -1 ir 1. Tada dydžio X vidurkis

$$\mathbf{E}X = (-1) \cdot \mathbf{P}(X = -1) + 1 \cdot \mathbf{P}(X = 1) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Jeigu su ta pačia moneta loštume iš didesnių pinigų, pavyzdžiui, iškritus herbui laimėtume 10 ct, o iškritus skaičiui pralaimėtume 10 ct, tai išlošį galėtume nusakyti atsitiktiniu dydžiu Y, įgyjančiu reikšmes -10 ir 10. Dydžio Y vidurkis

$$\mathbf{E}Y = (-10) \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Taigi dydžių X ir Y vidurkiai yra tie patys. Akivaizdu, kad dydžio Y reikšmės apie vidurkį yra išsisklaidžiusios labiau.

Nesunku sugalvoti ir daugiau atsitiktinių dydžių, įgyjančių skirtingas reikšmes, tačiau turinčių tą patį vidurkį.

1 užduotis. Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes -1 ir 3 su tikimybėmis $\frac{1}{2}$, o dydis Y — reikšmes -10 ir 12 su tikimybėmis $\frac{1}{2}$. Įsitikinkite, kad abu dydžiai turi tą patį vidurkį.

Tegu X yra atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes $x_1, x_2, \dots, x_k$. Šių reikšmių nuokrypiai nuo atsitiktinio dydžio X vidurkio lygūs

$$x_1 - \mathbf{E}X, \quad x_2 - \mathbf{E}X, \quad \dots, \quad x_k - \mathbf{E}X. \tag{1}$$

Šių skaičių eilėje yra ir neigiamų, ir teigiamų skaičių. Geriau nuokrypius nuo vidurkio reikšti teigiamais skaičiais. Todėl vietoje (1) eilutės skaičių nagrinėsime jų kvadratus

$$(x_1 - \mathbf{E}X)^2, \quad (x_2 - \mathbf{E}X)^2, \quad \dots, \quad (x_k - \mathbf{E}X)^2. \tag{2}$$

Kai atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1, x_2, \dots, x_k$, dydis $Y = (X - \mathbf{E}X)^2$ įgyja (2) eilutėje surašytas reikšmes. Apskaičiavę atsitiktinio dydžio Y vidurkį surasime, kam lygus vidutinis atsitiktinio dydžio X reikšmių nuokrypio nuo $\mathbf{E}X$ kvadratas.

APIBRĖŽIMAS

Tegu atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1, x_2, \dots, x_k$ su tikimybėmis $p_1, p_2, \dots, p_k$. Atsitiktinio dydžio X dispersija vadiname skaičių

$$\mathbf{D}X = (x_1 - \mathbf{E}X)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mathbf{E}X)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_k - \mathbf{E}X)^2 \cdot p_k,$$

o standartiniu nuokrypiu — skaičių $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}X}$.

Dispersija (o taip pat ir standartinis nuokrypis) nusako atsitiktinio dydžio reikšmių išsisklaidymo apie vidurkį didumą. Žodis *dispersio* lotyniškai ir reiškia išsisklaidymą. Dispersiją galime nusakyti ir taip: atsitiktinio dydžio X dispersija yra atsitiktinio dydžio $(X - \mathbf{E}X)^2$ vidurkis, t. y.

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2.$$

Apskaičiuokime, pavyzdžiui, 1 pavyzdžio atsitiktinių dydžių X ir Y dispersijas ir standartinius nuokrypius.
Kadangi

$$\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2},$$

tai

$$\mathbf{E}X = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

o

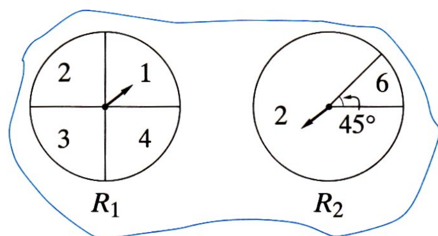
$$\mathbf{D}X = (1-0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1-0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \qquad \sigma(X) = 1.$$

Panašiai gauname, kad $\mathbf{D}Y = 100$, $\sigma(Y) = 10$.

2 užduotis. Apskaičiuokite 1 užduoties atsitiktinių dydžių X ir Y dispersijas ir standartinius nuokrypius.

Kuo didesnė dydžio dispersija (ir standartinis nuokrypis), tuo dažniau dydis įgyja reikšmes, žymiai besiskiriančias nuo vidurkio. Kai didesnis reikšmės ir vidurkio skirtumas reiškia, pavyzdžiui, didesnį nuostolį ar laimėjimą, tai esant didesnei dispersijai rizikuojame daugiau pralošti, tačiau tuo pačiu metu turime didesnę galimybę daugiau išlošti.

2 PAVYZDYS. Lošėjas, sumokėjęs 2 Lt mokestį, gali pasirinkti, prie kurio iš dviejų ratų lošti.



Laimėjimo dydį parodo skaičius, užrašytas tame sektoriuje, kuriame ratui sustojus atsidūrė rodyklė. Apskaičiuokime išlošių prie pirmojo ir antrojo ratų vidurkius, dispersijas ir nustatykime, prie kurio rato lošiant galime tikėtis didesnės sėkmės, bet, jei nepasiseks — nesėkmė bus didesnė. Išlošiu laikysime laimėjimo dydžio ir mokesčio (t. y. 2 Lt) skirtumą.

Išlošiai tiek prie pirmojo, tiek prie antrojo ratų yra atsitiktiniai. Pažymėkime juos R_1 ir R_2 bei sudarykime jų skirstinius. Dydis R_1 gali įgyti reikšmes

$$1-2=-1, \qquad 2-2=0, \qquad 3-2=1, \qquad 4-2=2,$$

o dydis R_2 — reikšmes

$$2-2=0, \qquad 6-2=4.$$

Dydžių R_1 ir R_2 skirstiniai:

m	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(R_1=m)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

m	0	4
$\mathbf{P}(R_2=m)$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

Taigi

$$\mathbf{E}R_1=(-1)\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$
$$\mathbf{E}R_2=0\cdot\frac{7}{8}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.$$

Matome, kad išlošių vidurkiai prie abiejų ratų vienodi. Apskaičiuokime dispersijas ir standartinius nuokrypius:

$$\mathbf{D}R_1=\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=1{,}25;$$
$$\sigma(R_1)=\sqrt{1{,}25}\approx 1{,}12;$$
$$\mathbf{D}R_2=\left(0-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{7}{8}+\left(4-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8}=1{,}75;$$
$$\sigma(R_2)=\sqrt{1{,}75}\approx 1{,}32.$$

Taigi lošiant prie antrojo rato galime tikėtis tiek didesnių išlošių, tiek didesnių nuostolių.

Pratimai ir uždaviniai

65. Apskaičiuokite atsitiktinių dydžių X ir Y matematinę viltį, dispersiją ir standartinį nuokrypį, kai dydžių tikimybių skirstiniai tokie:

m	-1	1	2	3
$\mathbf{P}(X=m)$	0,2	0,1	0,3	0,4

m	1	2	3
$\mathbf{P}(Y=m)$	0,5	0,3	0,2

Kurio dydžio reikšmės išsisklaidžiusios apie vidurkį plačiau?

66. Metamas simetriškas lošimo kauliukas, kurio sienelės pažymėtos atitinkamai 2, 2, 3, 3, 3, 4 akutėmis. Apskaičiuokite atvirtusių akučių skaičiaus dispersiją.

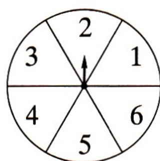
67. Metamas oktaedro formos lošimo kauliukas, kurio sienelės pažymėtos skaičiais $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$. Tegu X — sienelės, ant kurios atsistoja kauliukas, skaičius. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X dispersiją.

68. Metamas simetriškas įprastinis lošimo kauliukas, kurio sienelės pažymėtos 1, 2, 3, 4, 5, 6 akutėmis ir tetraedro formos lošimo kauliukas, kurio sienelės pažymėtos 2, 3, 4, 5 akutėmis. Pažymėkime X ant įprastinio lošimo kauliuko atvirtusių akučių skaičių, o Y — sienelės, ant kurios atvirto tetraedras, akučių skaičių. Apskaičiuokite atsitiktinių dydžių X ir Y matematines viltis ir dispersijas. Su kuriuo kauliuku lošiant rizikuojame daugiau pralošti?

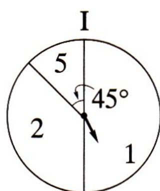
69. Metami du lošimo kauliukai: vienas — tetraedro formos su sienelėmis, pažymėtomis 3, 4, 5, 6 akutėmis, kitas — oktaedro formos su sienelėmis, pažymėtomis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 akutėmis. Pirmojo kauliuko sienelės, ant kurios atsistoja kauliukas, akučių skaičių pažymėkime X, kito — Y. Apskaičiuokite atsitiktinių dydžių X ir Y matematines viltis ir dispersijas.

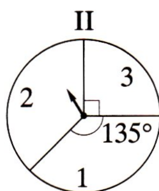
70. Krepšininkas, mesdamas į krepšį iš tam tikros vietos, pataiko su tikimybe 0,8. Per snaiperių konkursą iš šios aikštelės vietos krepšininkui teks mesti 5 metimus. Tegu X — pataikymų skaičius. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį ir dispersiją.

71. Lošimo ratas suskirstytas į 6 vienodo didumo sektorius. Pasukę ratą laukiame, kol jis sustos. Sektoriaus, kuriame atsidūrė rodyklė, skaičius rodo išlošio didumą. Tegu X — išlošio suma pasukus ratą vieną kartą. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X dispersiją ir standartinį nuokrypį. Kokia turi būti bilieto kaina, kad lošimo rato savininkas gautų vidutiniškai 0,5 lito pelno iš kiekvieno žaidėjo?



72. Žaidimų salėje yra du lošimo ratai.





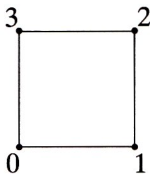
Skaičiai, pažymėti sektoriuose, rodo išloštą pinigų sumą, jeigu rodyklė sustoja šiame sektoriuje. Prie kurio lošimo rato sumokėjus 2 litų mokestį lošti yra naudingiau?

73. Kokios turi būti atsitiktinio dydžio X skirstinio

m	-1	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	p_1	p_2	p_3

tikimybės p_1, p_2 ir p_3, kad šio dydžio matematinė viltis būtų lygi nuliui, o dispersija — $\frac{1}{2}$, t. y. $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = \frac{1}{2}$?

74. Kvadrato viršūnės sužymėtos skaičiais 0, 1, 2, 3. Įsivaizduokime, kad iš viršūnės 0 pradeda ropoti vabalas. Atsitiktinai pasirinkęs vieną iš dviejų galimų krypčių, jis ropoja tol, kol pasiekia kitą viršūnę. Šioje viršūnėje jis vėl atsitiktinai pasirenka kryptį.

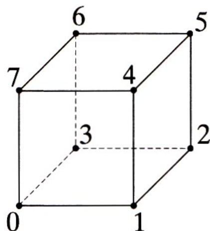


Tarkime, kad vienai kvadrato kraštinei įveikti jam reikia vienos minutės. Pažymėkime X — viršūnės, kurioje vabalas atsidūrė po 2 minučių, numerį. Raskite $\mathbf{E}X$ ir $\mathbf{D}X$.
Tegu Y — viršūnės, kurioje vabalas atsidūrė po 3 minučių, numeris. Raskite $\mathbf{E}Y$ ir $\mathbf{D}Y$.

Patarimas. Uždavinį bus lengviau išspręsti, jei sugalvosime gerą būdą galimiems vabalo keliams žymėti. Jeigu vabalas keliauja nuo mažesniu numeriu pažymėtos viršūnės prie pažymėtos didesniu numeriu (keliauja kvadratu prieš laikrodžio rodyklės judėjimo kryptį), tai šią kryptį žymėkime „+“, o priešingą kryptį žymėkime „−“.
Tada lengva išrašyti visus trijų minučių kelius ir rasti vabalo padėtis:

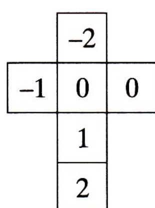
Kelias	$+ + +$	$+ + -$	...
Y	3	1	...

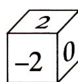
75. Kubo viršūnės sužymėtos skaičiais 0, 1, ..., 7. Iš viršūnės 0 pradeda ropoti vabalas. Jis ropoja kubo briaunomis panašiai kaip 10 uždavinio vabalas, tačiau dabar jis gali rinktis vieną iš galimų trijų krypčių. Tegu X — viršūnės, kurioje vabalas atsidūrė po 2 minučių, numeris. Raskite $\mathbf{E}X$ ir $\mathbf{D}X$.



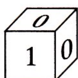
13. Kartojimo uždaviniai

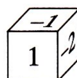
1. Lošimo kauliuko sienelės vietoj įprastinio žymėjimo viena, dviem, trimis, keturiomis, penkiomis ir šešiomis akutėmis sužymėtos skaičiais -2, -1, 0, 0, 1, 2. Pažymėkime X vieną kartą mesto tokio lošimo kauliuko atvirtusį skaičių. Pažymėkime Y du kartus mesto šio lošimo kauliuko atvirtusių skaičių sumą. Tegu Z — du kartus mesto šio lošimo kauliuko atvirtusių skaičių sandauga. Pažymėkime U du kartus mesto šio lošimo kauliuko pirmojo metimo rezultato ir antrojo metimo rezultato skirtumą.





$X = 2$





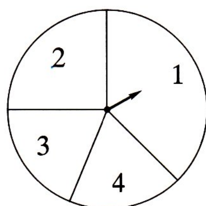
$Y = 0 + (-1)$

$Z = 0 \cdot (-1)$

$U = 0 - (-1)$

a) Suformuluokite taisykles, apibrėžiančias atsitiktinius dydžius X, Y, Z, U.
b) Raskite atsitiktinių dydžių X, Y, Z, U skirstinius ir pavaizduokite juos grafiškai.
c) Apskaičiuokite atsitiktinių dydžių X, Y, Z, U matematines viltis.
d) Apskaičiuokite atsitiktinių dydžių X, Y, Z, U dispersijas.

2. Lošimo ratas suskirstytas į 4 sektorius, kurių kampų dydžiai yra 135°, 90°, 67,5°, 67,5°. Galimi laimėjimų dydžiai yra atitinkamai 1 Lt, 2 Lt, 3 Lt, 4 Lt.



$X = 1$

Tegu atsitiktinis dydis X yra išlošio suma vieną kartą pasukus šį lošimo ratą.
a) Raskite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
b) Apskaičiuokite tikimybę išlošti ne mažiau kaip 2 Lt.
c) Apskaičiuokite $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}X$ ir $\sigma(X)$.
d) Kokį pelną už vieną lošimą vidutiniškai gauna lošimo rato šeimininkas, jei mokestis už vieną lošimą yra 2,5 Lt?

3. Atsitiktinio dydžio X matematinė viltis lygi 0,8, o jos skirstinys yra:

m	-2	1	2
$\mathbf{P}(X = m)$	0,1	p_1	p_2

čia p_1, p_2 — nežinomos tikimybės.
a) Apskaičiuokite tikimybes p_1 ir p_2.
b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X dispersiją ir standartinį nuokrypį.

4. Atsitiktinis dydis X, kurio matematinė viltis lygi 1, įgyja reikšmes 1, -2 ir 3 su tikimybėmis atitinkamai $\ln\alpha$, $\ln\beta$ ir $\ln\gamma$; čia α, β, γ yra skaičiai, sudarantys geometrinę progresiją.
a) Raskite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X dispersiją ir standartinį nuokrypį.

5. Krepšininkas meta tris baudos metimus. Vieną metimą jis pataiko su tikimybe 0,8. Tegu X — pataikytų metimų skaičius. Parašykite atsitiktinio dydžio X skirstinį. Apskaičiuokite $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}X$ ir $\sigma(X)$.

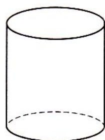
6. Simetrišką monetą metame 5 kartus. Tegu X — atvirtusių herbų skaičius.
a) Parašykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį ir dispersiją.

7. Petras tris kartus meta monetą. Kiekvieną kartą monetai atvirtus herbu Petras išlošia 2 Lt, o atvirtus skaičiumi — pralošia 1 Lt. Tegu X — laimėjimo dydis po trijų metimų.
a) Parašykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
b) Koks vidutinis laimėjimo dydis metant monetą tris kartus?

8. Dalyvauti loterijoje — tarsi mėtyti monetą. Dvi galimybės: įsigytas bilietas laimi arba ne. Žinoma, kad įsigijus tris bilietus, tikimybė, kad bent vienas iš jų laimės, lygi $\frac{19}{27}$.
a) Apskaičiuokite tikimybę, kad laimėsite įsigiję vieną šios loterijos bilietą.
b) Apskaičiuokite tikimybę, kad įsigijus du šios loterijos bilietus, bus laimingas vienas iš jų.
c) Pažymėkime X laimingų bilietų skaičių, kai įsigyti trys bilietai. Parašykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
d) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį ir dispersiją.

9. Matematikos mokytojas žino, kad Jolita, Agnė, Jonas, Tomas, Juozas ir Modestas yra vienodai gerai pasirengę matematikos valstybiniam egzaminui — kiekvieno iš jų tikimybė išlaikyti egzaminą lygi 0,9. Apskaičiuokite tikimybę, kad:
a) visi šie mokiniai matematikos egzamino neišlaikys;
b) egzaminą išlaikys vienas iš šių mokinių;
c) visi šie mokiniai egzaminą išlaikys;
d) egzaminą išlaikys vienas arba daugiau iš paminėtų moksleivių.

10. Urnoje yra n vienodų, sunumeruotų skaičiais nuo 1 iki n, rutulių. Atsitiktinai ištraukiamas vienas rutulys, užsirašomas jo numeris ir grąžinamas atgal į urną. Po to traukiamas antras rutulys, jo numeris taip pat užsirašomas. Tegu X — atsitiktinis dydis, reiškiantis ištrauktųjų rutulių numerį, jeigu jie vienodi, ir didesnįjį — jeigu ištraukti rutuliai su skirtingais numeriais.



② ②   ③ ④

$X = 2$ $X = 4$

a) Parašykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
b) Patikrinkite, ar gautojo skirstinio tikimybių suma lygi vienetui.
c) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.
1. Išspręskite uždavinį, kai rutulių skaičius urnoje $n = 3$.
2. Išspręskite uždavinį, kai rutulių skaičius urnoje $n = 4$.
3. Išspręskite uždavinį bendruoju atveju, kai $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 3$.

Nurodymas. Skaičiuodami atsitiktinio dydžio matematinę viltį, pasinaudokite formule
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

---

11. Ežere yra trijų rūšių žuvys: kuojos, raudės ir ešeriai. Kimba jos vienodai gerai. Bandymas — žvejyba meškere. Jis baigiasi, kai sugauname 2 žuvis. Apibrėžkime du dydžius: $X = 1$, jei pirma pagautoji žuvis yra kuoja ir $X = 0$ — jeigu raudė ar ešerys; $Y = 1$, jei antroji pagauta žuvis yra ešerys ir $Y = 0$ — jeigu ne ešerys.
a) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
b) Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip X ir Y reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.
c) Sudarykite dydžių X ir Y skirstinius.
d) Sudarykite dydžių poros (X, Y) skirstinį.
e) Ar dydžiai X ir Y yra nepriklausomi?

12. Kibire yra trys žuvys: kuoja, raudė ir ešerys. Katinas atlieka bandymą: gaudo žuvis. Bandymas pasibaigia, kai jis pagauna dvi žuvis. Apibrėžkime du dydžius: $X = 1$, jei pirma pagautoji žuvis yra kuoja ir $X = 0$ — jeigu raudė ar ešerys; $Y = 1$, jei antroji pagauta žuvis yra ešerys ir $Y = 0$ — jeigu ne ešerys.
a) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
b) Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip X ir Y reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.
c) Sudarykite dydžių X ir Y poros (X, Y) skirstinį.
d) Sudarykite dydžių X ir Y skirstinius.
e) Ar dydžiai X ir Y yra nepriklausomi?

13. Atsitiktinių dydžių poros skirstinys yra:

Y \ X	1	2
−1	0,1	0,2
0	0,2	0,3
1	0,1	0,1

a) Sudarykite atsitiktinių dydžių X ir Y skirstinius.
b) Ar dydžiai X ir Y yra priklausomi?

14. Atsitiktinių dydžių poros skirstinys yra:

Y \ X	−2	−1	0	1
0	0,06	0,06	0,04	0,04
1	0,24	0,24	0,16	0,16

a) Sudarykite atsitiktinių dydžių X ir Y skirstinius.
b) Ar dydžiai X ir Y yra priklausomi?

Įvairūs uždaviniai

15. 1 m ilgio strypą reikia padalyti į 2 dalis taip, kad pirmosios dalies ilgis būtų didesnis už antrosios dalies ilgį ne mažiau kaip 25%. Koks gali būti pirmosios dalies ilgis x?

16. 1 m ilgio strypą reikia padalyti į 3 dalis taip, kad antrosios dalies ilgis būtų lygiai 25% didesnis už pirmosios dalies ilgį. Koks gali būti pirmosios dalies ilgis x ir antrosios dalies ilgis y?

17. Du moksleiviai rinko kompiuteriu kartu parašyto referato tekstą. Pirmasis surinko $\frac{1}{3}$ teksto ir sugaišo 2 valandas, antrasis likusią dalį surinko per 3 valandas. Per kiek laiko visą tekstą būtų surinkęs kiekvienas moksleivis dirbdamas vienas?

18. 165 knygas galima išdėlioti į krūveles po 4 knygas ir po 7 knygas. Kiek daugiausiai krūvelių po 4 knygas gali susidaryti?

19. Išspręskite nelygybę:
$\frac{(x+2)(x^2+3\lg^2(x+1))}{3-x} \geqslant 0.$

20. Apskaičiuokite:

a) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$; b) $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

21. Išspręskite lygtį:

$\lg(x + 1{,}5) = -\lg x$.

22. Išspręskite nelygybę:

a) $2\log_{\frac{1}{2}}(1 - x) < \log_{\frac{1}{2}}(3x + 1)$; b) $\log_2 x < \log_2(3x - 1) - 2$.

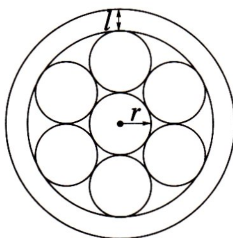
23. Nustatykite skaičiaus $\sin(\frac{3}{2}) - \cos(\frac{3}{2})$ ženklą.

24. Išspręskite lygtį:

$\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$.

25. Raskite lygties $\cos(2x) + \sqrt{2}\sin x = 1$ sprendinių, priklausančių intervalui $[-3; 2]$, skaičių.

26. Septyni vienodi skrituliai liečia vienas kitą kaip parodyta brėžinyje. Šių skritulių spindulių ilgiai lygūs r. Koks turi būti juos juosiančio žiedo plotis l, kad žiedo plotas būtų lygus septynių skritulių plotų sumai?



27. Raskite reiškinio $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})^2$ reikšmę, jei $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 120°$.

28. Apskaičiuokite kampą tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, jei $\vec{a}(1; \sqrt{3})$ ir $\vec{b} \neq 0$ kolinearus vektoriui $\vec{m}(\sqrt{3}; 1)$.

29. Trikampio ABC dvi viršūnės yra taškuose $A(2; 1)$ ir $B(3; 1)$. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AC}$ ilgį, jei taškas $D(4; -1)$ yra kraštinės BC vidurys.

30. Raskite vektoriaus $\vec{m}$, kolinearaus vektoriui $\vec{n}(3; -4)$, koordinates, jei vektorius $\vec{m}$ su Ox ašimi sudaro buką kampą ir $|\vec{m}| = 10$.

31. Duotas apskritimas, kurio centras O. Nubrėžtos dvi tarpusavyje statmenos stygos AB ir CD, kurios susikerta skritulio vidaus taške M. Įrodykite, kad

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Patarimas. Nubrėžkite du apskritimo skersmenis, atitinkamai statmenus stygoms AB ir CD.

Kartojimo uždavinių atsakymai

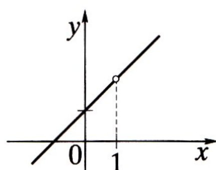
7 skyrius (98–106 psl.)

1. a) $D(f) = [2; 3) \cup (3; +\infty)$; b) $D(f) = (-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$;
c) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; d) $D(f) = [-2; -1] \cup [0; +\infty)$.

2. a) $[0; 3]$; b) $[-1; 0]$; c) $[-1; 3]$; d) $[-1; 8]$.

3. a) 1; b) 2; c) $\frac{1}{2}$; d) 1.

4. a) $f(x) = x + 1$, kai $x \neq 1$;



b) $f(x) = 1$, kai $x \neq 2$, $x \neq 3$; c) $f(x) = x - 4$, kai $x \neq 3$;
d) $f(x) = \sqrt{x} + 1$, kai $x \neq 1$.

5. a) -3, $f(x) = x - 4$, kai $x \neq 1$; b) -2, $f(x) = x + 3$, kai $x \neq -5$;
c) 12, $f(x) = x^2 + 2x + 4$, kai $x \neq 2$; d) 27, $f(x) = x^2 + 3x + 9$, kai $x \neq 3$.

6. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{8}$; c) $-\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{4}$.

7. a) Ne; b) taip.

8. a) Taip; b) ne.

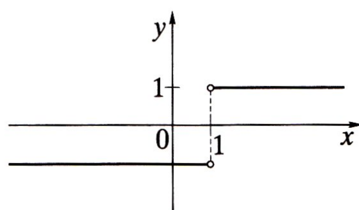
9. a) Ne; b) taip; c) taip; d) taip.

10. a) Tolydi; b) tolydi.

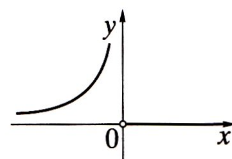
11. $f(x) = \frac{1}{x}$, $I_1 = (-\infty; 0)$, $I_2 = (0; +\infty)$.

12. a) $k = -1$; b) $k = 1$; c) $k = 0$; d) $k > 0$.

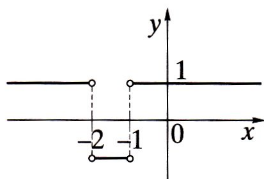
13. a) Trūkis taške $x = 1$;



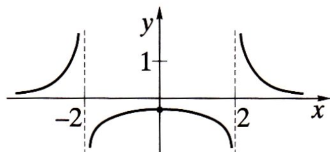
b) trūkis taške $x = 0$;



c) trūkiai taškuose $x = -1$, $x = -2$;



d) trūkiai taškuose $x = -2$, $x = 2$.



14. a) $2x^2 - x + (4x - 1) \cdot \Delta x + 2 \cdot (\Delta x)^2$; b) $3x^2 + 2x + (6x + 2) \cdot \Delta x + 3 \cdot (\Delta x)^2$.

15. a) 0,03; b) −2,32; c) 0,52; d) 1,671.

16. a) y padidėjo nuo 2 iki 10; b) 0,0601.

18. a) $p'(x) = 6x$; b) $p'(x) = 4x(3x - 1)$; c) $p'(x) = 10x(1 - x^8)$;
d) $p'(x) = x^2(x^2 + x + 1)$; e) $p'(x) = x(5x^3 + 8)$; f) $p'(x) = 6x^5(4x^2 - 1)$.

19. $f(x) = |(x - 1)(x - 2)|$.

20. a) $y = 2x - 4$; b) $y = -1$; c) $y = -2x$; d) $y = -4x - 1$.

21. a) 45°; b) 135°; c) 0°; d) 135°.

22. a) $(6; -3)$; b) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$; c) $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$; d) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$.

23. a) $(0; 0)$; b) $(1; 1)$; c) $(2; -3)$; d) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

24. $a = -7$.

25. $a_1 = -2$, $a_2 = -6$.

26. a) $f'(x) = 9x^8 - 7x^6$; b) $f'(x) = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$; c) $f'(x) = x^2(7\sqrt{x} + 3)$;
d) $f'(x) = \sqrt{2}\left(x^{\sqrt{2}-1} + x^{-\sqrt{2}-1}\right)$; e) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; f) $f'(x) = \frac{10}{3}x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$.

27. a) π; b) π; c) $\frac{1}{2}$; d) -1.

28. $x = 1$.

29. $x_1 = 1$, $x_2 = 9$.

31. $f'(\mathrm{e}) < f'(1) < f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

32. a) $f(g(x)) = 2x^2 - 3$, $g(f(x)) = (2x - 3)^2$;
b) $f(g(x)) = x$, $x \geqslant 0$, $g(f(x)) = |x|$;
c) $f(g(x)) = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
d) $f(g(x)) = 1 + \frac{1}{x}$, $g(f(x)) = \frac{1-x}{2-x}$.

33. a) $g'(x) = -3\cos^2 x \sin x$; b) $g'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$; c) $g'(x) = 3\sin 6x$;
d) $g'(x) = \frac{2\ln x}{x}$; e) $g'(x) = 2x\mathrm{e}^{2x}(1 + x)$; f) $g'(x) = \frac{3\ln^2 x}{x\ln^3 3} = \frac{3\log_3^2 x}{x\ln 3}$.

34. a) $3^4 \ln 3$; b) 3; c) 2; d) 1.

36. a) Susitiks du kartus: kai $t_1 = 1$ ir $t_2 = 3$;
b) $v_1(1) = 8$, $v_1(3) = 24$, $v_2(1) = 10$, $v_2(3) = 22$.

37. $v(t) = \frac{-8t}{\sqrt{25-4t^2}}$.

38. a) $R(27) = \frac{9}{2\sqrt[3]{\pi}} \approx 3{,}07$ (dm); b) $v(27) = \frac{1}{18\sqrt[3]{\pi}} \approx 0{,}04$ (dm/s).

40. a) Didėja $(-\infty; +\infty)$; b) didėja $(1; +\infty)$, mažėja $(-\infty; 1)$; c) didėja $(4; +\infty)$, mažėja $(-\infty; 4)$; d) didėja $(-\infty; -2)$ ir $(2; +\infty)$, mažėja $(-2; 2)$; e) didėja $(-\infty; 0)$ ir $(2; +\infty)$, mažėja $(0; 2)$; f) didėja $(-2; 0)$ ir $(2; +\infty)$, mažėja $(-\infty; -2)$ ir $(0; 2)$.

41. a) Didėja $(-1; 1)$, mažėja $(-\infty; -1)$ ir $(1; +\infty)$; b) didėja $(-\infty; 0)$, mažėja $(0; +\infty)$; c) didėja $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, mažėja $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; d) didėja $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$, mažėja $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

42. a) $a \leqslant \frac{1}{50}$; b) $a \geqslant \frac{1}{8}$.

43. a) $x = \frac{1}{5}$; b) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; c) nėra; d) $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

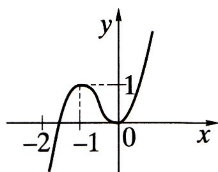
44. a) $f(0) = 0$ (maksimumas), $f(2) = -44$ (minimumas); b) $f(-1) = 10$ (maksimumas), $f(3) = -54$ (minimumas); c) $f(-2) = f(2) = -32$ (minimumas), $f(0) = 0$ (maksimumas); d) ekstremumų nėra.

45. a) $f(-1) = -4$ (maksimumas), $f(1) = 4$ (minimumas); b) ekstremumų neturi; c) $f(1) = -1$ (maksimumas); d) $f(1) = \mathrm{e}$ (minimumas).

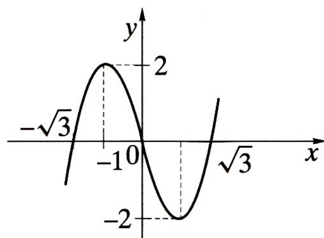
46. $y = 0$.

47. a) $E(g) = [4; +\infty)$; b) $E(g) = [-48; +\infty)$; c) $E(g) = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$; d) $E(g) = (-\infty; 3{,}25]$.

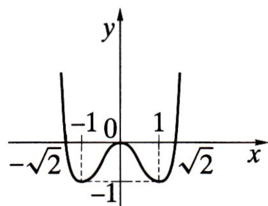
48. a) $D(f) = \boldsymbol{R}$; $f(-1{,}5) = 0$; $f(-1) = 1$ (maksimumas), $f(0) = 0$ (minimumas).



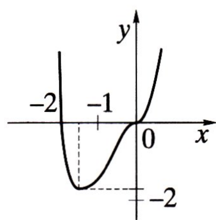
b) $D(f) = \boldsymbol{R}$; nelyginė; $f(0) = f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = 0$; $f(-1) = 2$ (maksimumas), $f(1) = -2$ (minimumas).



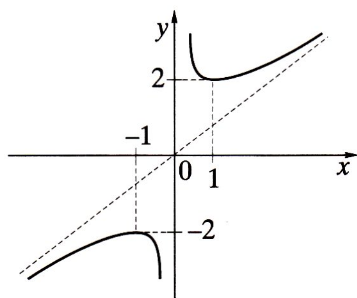
c) $D(f) = \boldsymbol{R}$; lyginė; $f(0) = f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$; $f(-1) = f(1) = -1$ (minimumai), $f(0) = 0$ (maksimumas).



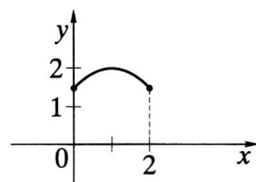
d) $D(f) = \boldsymbol{R}$; $f(-2) = f(0) = 0$; $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -1\frac{11}{16}$ (minimumas), taške $x = 0$ ekstremumo nėra.



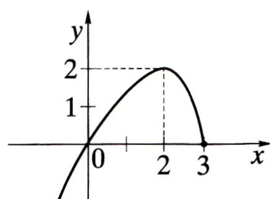
49. a) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; nelyginė; nuliu nevirsta; $f(-1) = -2$ (maksimumas), $f(1) = 2$ (minimumas).



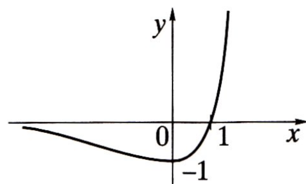
b) $D(f) = [0; 2]$; $f(0) = f(2) = \sqrt{2}$; $f(1) = 2$ (maksimumas).



c) $D(f) = (-\infty; 3]$; $f(0) = f(3) = 0$, $f(2) = 2$ (maksimumas).



d) $D(f) = \boldsymbol{R}$; $f(1) = 0$; $f(0) = -1$ (minimumas).



50. a) $\min\limits_{[0;4]} g(x) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} g(x) = 20$; b) $\min\limits_{[-1;2]} g(x) = -4$, $\max\limits_{[-1;2]} g(x) = 4$;
c) $\min\limits_{[-1;3]} g(x) = -16$, $\max\limits_{[-1;3]} g(x) = 11$; d) $\min\limits_{[-2;2]} g(x) = -4$, $\max\limits_{[-2;2]} g(x) = 0$.

51. a) $\min\limits_{[-4;2]} g(x) = -\frac{1}{4}$, $\max\limits_{[-4;2]} g(x) = \frac{1}{4}$;
b) $\min\limits_{[0;\ln 100]} g(x) = -3$, $\max\limits_{[0;\ln 100]} g(x) = \mathrm{e}^{-4}$.

52. $a = 7$.

53. -3.

54. $16\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3}$.

55. $a_4 = 2\,\mathrm{m}$, $h = 1\,\mathrm{m}$.

56. 16 cm.

57. Kas 20 min; kas $13\frac{1}{3}$ min.

58. a) $(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$; b) $2b(3a^2+b^2)$.

59. -9; 4.

60. a) $(3; 3\frac{1}{2})$; b) $(-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (5; +\infty)$.

61. a) 2; b) 1.

62. 750 kartų; $\approx 0{,}1$ mm.

63. 10 cm; 10 cm; 15 cm.

65. $\frac{1}{4}$.

66. a) 9; b) 8.

67. 3.

68. 40%.

69. 4,5%.

70. $\frac{23}{28}$.

71. $\frac{51}{243} \approx 0{,}2$.

72. $\frac{2}{5}$.

73. 0,6.

74. $\frac{1}{3}$.

75. $\frac{1}{5}$.

10 skyrius (142–146 psl.)

1. a) $F(x) = x^3 - x^2 + 7$; b) $F(x) = x + \ln|x| + 2$; c) $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$; d) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + x + 10\frac{1}{2}$.

2. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 1\frac{1}{2}$.

3. a) $F(x) = \frac{1}{14}(2x+3)^7 + C$; b) $F(x) = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + C$; c) $F(x) = -\frac{3}{5}(3-x)^{\frac{5}{3}} + C$; d) $F(x) = \frac{1}{3}\ln|3x-4| + C$; e) $F(x) = \frac{-1}{(2x-5)^2} + C$; f) $F(x) = \frac{3^{3x}}{3\ln 3} + C$; g) $F(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + C$; h) $F(x) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{ctg}(\pi x) + C$.

4. a) $\frac{3}{5}x^{\frac{10}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$; b) $2x\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{7}x^2\right) + C$; c) $2\sqrt{x}\left(\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{3}x - 1\right) + C$; d) $\frac{x^2}{2} + \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + \ln|x| + C$; e) $x - 6\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 3\ln x + C$, $x > 0$; f) $-\frac{16}{x} + \frac{16}{\sqrt{x}} + \ln x + C$, $x > 0$.

5. a) $-\frac{1}{4}e^{-4x} + 2x + \frac{1}{4}e^{4x} + C$; b) $\frac{3^{2x}}{2\ln 3} + \frac{6^x}{\ln 6} + C$; c) $e^x + e^{-x} + C$; d) $\frac{8^x}{\ln 8} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}$.

6. a) $\frac{1}{2}\sin(2x) + C$; b) $\frac{1}{4}\sin(4x) + C$; c) $-\frac{1}{2}\cos(2x) + C$; d) $\sin(2x) + C$.

7. a) 18 m; b) 108 m.

8. a) $\frac{15}{2\ln 2} \approx 10{,}82$ (m); b) $\frac{8}{\ln 2} \approx 11{,}54$ (m).

9. b) $\approx 0{,}916$; c) $\frac{16{,}8}{\lg 2} \approx 55{,}8$ paros; $\frac{5{,}6}{\lg 2} \approx 18{,}6$ metų; $\frac{18}{\lg 2} \approx 59{,}8$ min.

10. a) 3; b) 2; c) $\frac{1}{3}$.

11. a) $20\frac{5}{6}$; b) $20\frac{5}{6}$; c) $20\frac{5}{6}$; d) $\frac{20\sqrt{5}}{3}$; e) $10\frac{2}{3}$; f) $10\frac{2}{3}$; g) 4; h) 4.

12. a) $9\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $12 - 5\ln 5$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{4}{\ln 3} - \frac{3}{2}$; f) $e + e^{-1} - 2$.

13. a) $10\frac{2}{3}$; b) 36.

14. 1,125.

15. $V_{rut} = 36\pi$, $V_{suk} = 34\frac{2}{15}\pi$, $V_{rut} > V_{suk}$.

16. a) $\frac{3\pi}{5}$; b) $\frac{3\pi}{2}$; c) $\frac{99\pi}{200}$; d) 2π.

17. 7 d.

18. Ne.

21. a) $(-\infty; -7) \cup (2; +\infty)$; b) $\left[-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

22. a) $(0; 1)$; b) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

23. 30° ir 150°.

24. 22 dm.

25. 150 cm^2.

27. *Nurodymas*. Remkitės formule $(m+n)^2 = (m+r)^2 + (n+r)^2$, čia r — atstumas nuo stačiojo kampo viršūnės iki lietimosi taško.

28. *Nurodymas*. Papildykite brėžinį, nubrėždami skersmenis, lygiagrečius stygoms.

29. $\frac{R}{3}$.

30. $\sqrt{Rr}$.

31. $\frac{7}{9}$.

32. $3^4 = 81$.

33. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{3}$.

13 skyrius (178–182 psl.)

1. b)

m	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

m	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

m	-4	-2	-1	0	1	2	4
$\mathbf{P}(Z = m)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

m	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}(U = m)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

c) $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = \mathbf{E}Z = \mathbf{E}U = 0$;

d) $\mathbf{D}X = 1\frac{2}{3}$, $\mathbf{D}Y = 3\frac{1}{3}$, $\mathbf{D}Z = 2\frac{1}{3}$, $\mathbf{D}U = 3\frac{1}{3}$.

2. a)

m	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$

b) 0,625;

c) $\mathbf{E}X = 2\frac{3}{16}$, $\mathbf{D}X \approx 1{,}28$, $\sigma(X) \approx 1{,}13$;

d) 0,31 Lt.

3. a) $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}1$; b) $\mathbf{D}X = 0{,}96$, $\sigma(X) \approx 0{,}98$.

4. a)

m	-2	1	3
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

b) $\mathbf{D}X = 5$, $\sigma(X) \approx 2{,}24$.

5.

m	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m)$	0,008	0,096	0,384	0,512

$\mathbf{E}X = 2{,}4$, $\mathbf{D}X = 0{,}48$, $\sigma(X) \approx 0{,}69$.

6. a)

m	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

b) $\mathbf{E}X = 2{,}5$, $\mathbf{D}X = 1{,}25$.

7. a)

m	-3	0	3	6
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) 1,5.

8. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{4}{9}$;

c)

m	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

d) $\mathbf{E}X = 1$, $\mathbf{D}X = \frac{2}{3}$.

9. a) 10^{-6}; b) $5{,}4 \cdot 10^{-5}$; c) $\approx 0{,}53$; d) $1 - 10^{-6}$.

10. 1. a)

m	1	2	3
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

c) $2\frac{4}{9}$.

2. a)

m	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

c) $3\frac{1}{8}$.

3. a)

m	1	2	3	...	n
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{3}{n^2}$	$\frac{5}{n^2}$	...	$\frac{2n-1}{n^2}$

c) $\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.

11. a) $e_1 = (k; k)$, $e_2 = (k; r)$, $e_3 = (k; e)$, $e_4 = (r; k)$, $e_5 = (r; r)$, $e_6 = (r; e)$, $e_7 = (e; k)$, $e_8 = (e; r)$, $e_9 = (e; e)$;

b) $X(e_4) = X(e_5) = X(e_6) = X(e_7) = X(e_8) = X(e_9) = 0$, $X(e_1) = X(e_2) = X(e_3) = 1$, $Y(e_1) = Y(e_2) = Y(e_4) = Y(e_5) = Y(e_7) = Y(e_8) = 0$, $Y(e_3) = Y(e_6) = Y(e_9) = 1$;

c)

m	0	1
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

m	0	1
$\mathbf{P}(Y=m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

d)

Y \ X	0	1
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

e) nepriklausomi.

12. a) $e_1 = (k; r)$, $e_2 = (k; e)$, $e_3 = (r; k)$, $e_4 = (r; e)$, $e_5 = (e; r)$, $e_6 = (e; k)$;
b) $X(e_3) = X(e_4) = X(e_5) = X(e_6) = 0$, $X(e_1) = X(e_2) = 1$,
$Y(e_1) = Y(e_3) = Y(e_5) = Y(e_6) = 0$, $Y(e_2) = Y(e_4) = 1$;

c)

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

d)

m	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

m	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

e) priklausomi.

13. a)

m	1	2
$\mathbf{P}(X = m)$	0,4	0,6

m	−1	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	0,3	0,5	0,2

b) priklausomi.

14. a)

m	−2	−1	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	0,3	0,3	0,2	0,2

m	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	0,2	0,8

b) nepriklausomi.

15. $\frac{5}{7} \leqslant x < 1$.
16. $0 < x < \frac{4}{9}$, $y = \frac{5}{4}x$.
17. 6 val. ir 4,5 val.
18. 36.
19. $(-1; 3)$.
20. a) 39; b) 2.
21. 0,5.
22. a) $(0; 1)$; b) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.
23. $+$.
24. $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
25. 2.
26. r.
27. 22.
28. 30° arba 150°.
29. 5.
30. $(-6; 8)$.


ISBN 9955–491–44–2
9 789955 491446